Lògica i fonaments: 1850-1920

Un estudi comparatiu de les contribucions del corrent algèbric i logicista a la lògica contemporània

Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència

Programa: Lògica Matemàtica. Bienni: 1987-89

Per optar al títol de doctor en Filosofia

Lògica i fonaments: 1850-1920

Un estudi comparatiu de les contribucions del corrent algèbric i logicista a la lògica contemporània

Tesi doctoral presentada per

Joan Roselló Moya

Dirigida per

Josep Pla i Carrera

SEGONA PART

El desenvolupament del corrent logicista

CAPÍTOL IV

Dedekind: l'axiomatització de l'aritmètica i la teoria de conjunts

1. Introducció: La filosofia de la matemàtica dedekindiana

Des d'un punt de vista històric, sabem que Dedekind (1831-1916) havia començat a escriure *Was sind und was sollen die Zahlen?* (*1888*) l'any 1872 i que havia acabat una primera versió d'aquesta obra el 1878.[1] Dedekind però dubtava de si publicaria mai els resultats de les seves recerques sobre els fonaments de l'aritmètica que havia escrit en aquell primer esborrany.[2] Amb tot, l'any 1887 Dedekind escriurà dues noves versions de la mateixa obra, la darrer de les quals enviarà finalment a la impremta el 1888. Els motius que empenyeren Dedekind a publicar finalment el seu llibret sobre la teoria de nombres estan explicats en el prefaci a la primera edició de 1888. Dedekind enceta aquest prefaci amb el conegut epígraf segons el qual "allò que és demostrable, no ha de ser admès en la ciència sense demostració", i constata tot seguit que aquesta exigència "no es pot considerar satisfeta de cap manera ni tan sols en la fonamentació de la ciència més simple, això és, d'aquella part de la lògica que tracta de la teoria de nombres, tampoc després de les exposicions més recents".[3] Dedekind cita entre aquestes el llibre de Schröder *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* de 1873 i els articles de Kronecker (1823-1891) i Helmholtz (1821-1894) sobre el concepte de nombre,[4] la manca de rigor dels quals haurien empès Dedekind a publicar finalment les seves recerques sobre el concepte de nombre dutes a terme entre 1872 i 1878. En aquest prefaci, Dedekind reivindica una concepció logicista de l'aritmètica. Segons Dedekind:

> En dir que l'aritmètica (àlgebra, anàlisi) és només una part de la lògica, vull dir que considero el concepte de nombre quelcom totalment independent de les

---

[1] Aquesta primera redacció està reproduïda íntegrament a *Dugac 1976*, 293-309.

[2] Vegeu la carta a Weber (1842-1913) de 19/11/1878 (*Dedekind 1932*, 486).

[3] *Ibid.*, 335.

[4] "Über den Zahl Begriff" i "Zahlen und Meses erkentnistheoretisch betrachtet" respectivament, publicats tots dos l'any 1887.

> representacions o les intuïcions d'espai i temps, quelcom que és, ans al contrari, un resultat immediat de les lleis pures del pensament.[1]

Així doncs, el logicisme dedekindià descansa en la possibilitat d'una construcció purament lògica del concepte de nombre, sense apel·lar a les intuïcions d'espai i temps. Ara bé, segons Dedekind, això només és possible gràcies a la noció d'*aplicació*. Aquesta idea ja és present en la primera redacció de 1872-78 de *Was sind*:

> Si hom cerca acuradament allò que fem en contar un conjunt o quantitat de coses, llavors es conduït necessàriament al concepte de correspondència [*Correspondenz*] o aplicació [*Abbildung*].[2]

Dedekind reprèn aquesta idea en el prefaci de l'edició de 1888, on considera que la noció d'aplicació és "l'únic fonament [...] sobre el qual s'ha d'erigir la ciència dels nombres en el seu conjunt".[3] Tal com veurem més endavant, en efecte, Dedekind defineix a partir de la noció d'aplicació la noció de sistema simplement infinit i, per *abstracció* de la constitució particular dels elements que pertanyen a tot sistema d'aquesta mena, el sistema dels nombres naturals. Com afirma el propi Dedekind a *Was sind*, és només gràcies a aquest procés d'abstracció que "hom pot anomenar justament als nombres una lliure creació de l'esperit humà"[4] i donar així resposta a la pregunta que dóna títol a l'obra en qüestió. D'una altra banda, aquesta creació per abstracció del sistema dels nombres naturals a partir dels sistemes simplement infinits permet despullar el primer del seu caràcter específicament aritmètic i subordinar-lo "als conceptes generals i a les activitats de l'enteniment sense les quals res no és pensat i gràcies a les quals les nostres demostracions poden ser segures i definitives, restant els nostres conceptes i definicions exempts totalment de contradiccions".[5] Pel que fa a les demostracions, Dedekind assenyala que sap molt bé que la majoria dels seus lectors "suportarà pacientment haver de cercar demostracions de veritats que, segons la seva pretesa intuïció interior, semblen evidents de bon començament i del tot certes. Per contra, jo veig en la possibilitat de demostrar aquestes veritats a partir d'altres més simples -per molt llarga i aparentment artificial que pugui ser la sèrie de raonaments-, una demostració convincent que

---

1 *Ibid.*, 335.
2 *Dugac 1976*, 293.
3 *Dedekind 1932,* 336.
4 *Ibid.*, 360.
5 *Dedekind 1979*, 32. Cita d'un inèdit de 1882 titulat *Bunte Bemerkungen zur Kronecker*.

la seva possessió o la creença en elles mai ens és donada immediatament per la intuïció interna".[1] Així doncs, es tracta de demostrar totes les proposicions de l'aritmètica, "esglaonadament", pas a pas, a partir d'aquelles proposicions més simples que Dedekind precisament s'encarregarà de descobrir, car només així hom s'adonarà que tot l'edifici de l'aritmètica descansa sobre unes poques veritats a partir de les quals pot deduir rigorosament tota la resta de veritats sense haver de recórrer en cap moment a la intuïció. Pel que fa a l'exigència de rigor en la definició dels conceptes aritmètics, que nosaltres sapiguem, Dedekind no en diu res, però està clar que per ell la definició rigorosa dels conceptes aritmètics pressuposava la definició d'aquests conceptes en termes de les nocions bàsiques de la seva teoria de sistemes [*Systemlehre*]: *sistema*, *pertinença* o *inclusió* i *aplicació*. Més endavant estudiarem la crítica de Frege envers l'ideal de rigor expressat per Dedekind i, per extensió, envers el logicisme de Dedekind.

Hem vist abans que Dedekind considerava que no només l'aritmètica, sinó també l'àlgebra i l'anàlisi, formen part de la lògica. Això és una conseqüència immediata de la possibilitat de construir primer els nombres sencers, després els racionals i, per últim, els reals, com extensions successives dels naturals, la qual ja havia estat defensada per Dedekind en la seva obra *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (*1872*), on exposa la seva coneguda construcció del nombres reals com *talls* [*Schnitte*] dels nombres irracionals, això és, l'extensió dels nombres racionals als reals.[2] El punt de partida d'aquesta obra és, tal com assenyala Dedekind en el prefaci, la renuncia a tot recurs a la geometria per fonamentar l'anàlisi i la ferma decisió de trobar "un fonament purament aritmètic i perfectament rigorós dels principis de l'anàlisi infinitesimal".[3] La raó fonamental d'això és que el concepte de "magnitud mesurable" en el que es basen la major part de les teories sobre el nombres reals -excepció feta de les teories de Cauchy i Cantor, que els introdueixen com a límits de successions de racionals- és un concepte "complicat i fosc alhora"[4] i que les representacions

---

[1] *Dedekind 1932*, 337.

[2] A 1872 Dedekind no ha publicat encara la seva teoria dels nombres naturals i, per tant, Dedekind no fa sinó indicar de forma informal en el prefaci de *Stetigkeit und irrationale Zahlen* com es pot dur a terme l'extensió dels nombres naturals als sencers i d'aquests als racionals. Emmy Noether (1882-1935), l'editor de *Gesammelte mathematische Werke* (*Dedekind 1930-32*), afirma en un comentari a una carta de Dedekind a Weber (24/01/1888), que Dedekind hauria exposat en detall, en resposta a una pregunta d'un estudiant, "l'extensió de la sèrie *N* dels nombres naturals a la sèrie *Q* dels nombres sencers racionals mitjançant la introducció de parells de nombres i la indicació per les extensions següents" (*Dedekind 1932*, 490).

[3] *Ibid*., 316.

[4] *Ibid*., 476.

geomètriques de la continuïtat no són prou rigoroses.[1] Això mostra clarament que Dedekind s'inscriu dins del corrent d'aritmetització de l'anàlisi predominant al segle XIX, influït clarament en aquest respecte pel seu amic P. G. Dirichlet (1805-1859), del qual havia après que "tot teorema de l'àlgebra i de l'anàlisi superior, per poc evident que sigui, pot expressar-se com un teorema sobre els nombres naturals".[2] D'una altra banda, el projecte dedekindià d'una fonamentació de l'anàlisi, ja no en la geometria, sinó en l'aritmètica, constitueix, tal com ha assenyalat Dugac "una "resposta" al seu mestre Gauss, que el 8 d'Abril de 1830 escrivia a Bessel que "l'espai és una dada *a priori* del nostre saber, però els nombres són una creació del nostre esperit".[3] En efecte, com afirma Dedekind en el prefaci de la primera edició de *Was sind*, "mitjançant la construcció purament lògica de la ciència del nombre i el domini numèric continu que amb ella s'obté, estarem ja en condicions de recercar acuradament les nostres representacions d'espai i temps, relacionant-les amb el domini numèric creat en el nostre esperit".[4] Una vegada explicats els trets essencials de la filosofia de la matemàtica dedekindiana, tal com aquesta és exposada sobretot en el prefaci de la primera edició de *Was sind*, en les properes seccions estudiarem el contingut d'aquesta obra amb una mica més de detall.

2. La teoria de sistemes o conjunts

La primera secció de *Was sind* es titula *Sistemes d'elements* [*Systeme der Elemente*] i en ella Dedekind fa una mena d'introducció intuïtiva a la teoria de sistemes o conjunts que pressuposa la seva teoria de nombres. Dedekind comença explicant que entén per *cosa* [*Ding*] "tot objecte del nostre pensament" i afirma que "una cosa està completament determinada per tot allò que hom pot dir o pensar d'ella", de manera que si a i b designen dues coses, hom escriurà que $a = b$ si "tot allò que hom pot pensar de a, ho pot pensar de b" i viceversa.[5] Dedekind explica a continuació què entén per un *sistema* o, com diríem avui en dia, un *conjunt*:

---

[1] *Ibid.*, 316.
[2] *Ibid.*, 338.
[3] *Dugac 1976*, 80.
[4] *Dedekind 1932*, 335-36.
[5] *Cf. ibid.*, 344.

> S'esdevé molt sovint que coses diferents $a, b, c, \ldots$ són, per un motiu qualsevol, concebudes des d'un punt de vista comú i reunides pel nostre esperit; hom diu llavors que formen un sistema S i anomena a les coses $a, b, c, \ldots$, que són contingudes en S, elements de S.[1]

Segons Dedekind, "un sistema S d'aquesta mena (una síntesi, multiplicitat o totalitat) és, així mateix, en tant que objecte del pensament, una cosa";[2] és a dir, que un conjunt pot ser considerat alhora com un element d'un altre conjunt. Un sistema "S està completament determinat si per cada cosa està determinat si és element de S o no",[3] d'on se segueix que dos sistemes o conjunts són iguals, en símbols $S = T$, "si tot element de S és element de T" i viceversa".[4] Dedekind remarca, responent així al punt de vista constructivista defensat per Kronecker respecte a aquesta qüestió, que la manera en què hom determini si un element pertany o no a un sistema i la qüestió de saber si hi ha un mètode per decidir-ho, són indiferents.[5] En altres paraules, Dedekind exigeix només una determinació teòrica, no necessàriament efectiva, de la pertinença o no de qualsevol cosa a un conjunt donat, per a que aquest conjunt estigui ben definit.[6] Dedekind assenyala a continuació que "és convenient, per tal d'uniformitzar la forma d'expressió, acceptar també el cas especial en què un sistema S consta d'un sol (d'un i solament un) element a",[7] però no distingeix l'element a del sistema o conjunt que té a com a únic element. Per contra, continua Dedekind, "per certes raons, volem excloure totalment el sistema buit, el qual no conté cap element, si bé per altres recerques podria ésser convenient d'inventar-ne un".[8] Dedekind no explica quines són aquestes raons, però és probable que entre elles hi figurés de forma destacada la seva definició extensional de la noció de sistema, que exclou clarament la possibilitat d'introduir el conjunt buit. En la resta de la primera secció, Dedekind defineix què significa que un sistema A sigui *part* [*Teil*] d'un sistema S, això és, la relació d'*inclusió* entre conjunts, que ell simbolitza per A 3 S i que nosaltres escriurem de la forma habitual ($A \subseteq S$), que A sigui *part pròpia* [*echter Teil*] de S, això és, la relació d'*inclusió estricta* entre conjunts; la *unió* de sistemes [*zusammengesetztes*

---

[1] *Ibid.*, 344.
[2] *Ibid.*, 345.
[3] *Ibid.*, 345.
[4] *Ibid.*, 345.
[5] *Ibid.*, 345 n.
[6] Tal com veurem més endavant, Frege expressarà una exigència anàloga amb el seu criteri d'estricta delimitació dels conceptes.
[7] *Ibid.*, 345.
[8] *Ibid.*, 345.

System] i, finalment, la *intersecció* [*Gemeinheit*] de sistemes no disjunts. Dedekind precisa aquí que si els sistemes considerats no tenen cap element en comú, llavors el signe utilitzat per designar la seva intersecció no té cap significat. Totes aquestes definicions es formulen en termes de la relació de pertinença i, per tant, en termes essencialment anàlegs a les definicions actuals. Així mateix, Dedekind deriva d'aquestes definicions alguns teoremes prou coneguts de la teoria de conjunts moderna referents a aquestes relacions i operacions entre conjunts.

Hem vist fa un moment que Dedekind no és capaç a *Was sind* de distingir adequadament entre un element i el seu singletó i rebutja explícitament la introducció del conjunt buit. Ja en una carta a Weber de 24/01/1888, escrita poc després de la publicació d'aquesta obra, Dedekind reconeixerà que "per evitar contradiccions segures, hauria estat molt millor distingir el sistema format per un únic element *a* de [l'element] *a*, si més no en la notació".[1] En un inèdit força interessant, però tardà (posterior a 1899), titulat *Gefahren der Systemlehre* [*Perills de la teoria de sistemes*], Dedekind dedueix una contradicció en la *Systemlehre* de *Was sind*, l'origen de la qual rau efectivament en la identificació entre un element i el sistema que conté només aquest element. Dedekind conclou llavors que "si es volen evitar aquesta mena de perills, està clar que pel sistema *S* que consta de *a* com a únic element, no s'ha d'entendre el propi *a*".[2] Un altre dels perills a què condueix la manca de distinció entre un element i el seu singletó és la confusió entre pertinença i inclusió, que apareix clarament en el següent text de *Was sind*: "donat que [...] cada element pot ser considerat ell mateix com un sistema, hom pot emprar també aquí la notació *s* 3 *S*",[3] on "3" és, com ja sabem, el símbol emprat per Dedekind per designar la inclusió entre sistemes. D'aquesta confusió entre pertinença i inclusió, Dedekind en deriva també en l'inèdit *Gefahren der Systemlehre* una contradicció i proposa per evitar aquest "perill" "designar amb {*s*} el sistema l'únic element del qual és la cosa *s*, d'on se segueix certament que {*s*} 3 *S*, però no *s* 3 *S*".[4] En qualsevol cas, Dedekind és incapaç d'albirar una notació per a la relació de pertinença d'un element a un conjunt, la qual fou introduïda per primera vegada per Peano. Un altra de les qüestions tractades a *Gefahren der Systemlehre* és la possibilitat d'acceptar o no el conjunt buit. Tal com hem dit abans, la raó fonamental que hauria dut Dedekind a rebutjar a *Was sind* la possibilitat d'introduir el conjunt buit hauria estat la

[1] *Dugac 1976*, 273.
[2] *Dedekind 1998*, 152.
[3] *Dedekind 1932*, 345.
[4] *Dedekind 1998*, 153.

definició extensional de sistema que Dedekind dóna en aquella obra. Però, precisa ara a *Gefahren der Systemlehre*, "molt sovint un sistema *S* no es definirà immediatament designant cada un dels seus elements $a, b, c...$ sinó mediatament mitjançant condicions necessàries i suficients que ha de complir una cosa per ser element de *S*".[1] Així, pot donar-se el cas que *una sola* cosa satisfaci aquestes condicions -d'aquí la necessitat d'introduir el singletó d'un element- o que *cap* cosa satisfaci aquestes condicions -d'aquí la necessitat d'introduir el conjunt buit.

3. El concepte d'aplicació. Sistemes semblants

La segona secció de *Was sind* es titula *Aplicació d'un sistema* [*Abbildung einer System*] i és la més important del llibre, en la mesura que en ella es defineix la noció d'*aplicació* [*Abbildung*], que és la noció central de l'obra de Dedekind. Tal com vèiem abans, en efecte, el procés de comptar pressuposa, segons Dedekind, la idea d'aplicació o correspondència. Aquesta idea és aprofundida en la carta a Keferstein de 27/02/1890 en el termes següents:

> Els elements del sistema *N* estan en una certa relació els uns amb els altres, en un cert ordre determinat, en primer lloc, pel fet que a cada nombre determinat *n*, li correspon de nou un nombre determinat *n*', el nombre que segueix o ve després de *n*. Això duu a la consideració del concepte general d'una aplicació ϕ d'un sistema.[2]

Tant la definició dedekindiana d'aplicació com la idea de bastir sobre aquesta noció tota la teoria de nombres són manllevades de Dirichlet. Segons aquest autor, en efecte, sempre "que en un sistema donat d'objectes Ω, tot element ω és reemplaçat, d'acord amb certes lleis, per un element determinat en correspondència amb ell [...] hom pot considerar aquesta substitució com una aplicació del sistema Ω i, d'aquesta manera, anomenar ω' la imatge de ω, Ω' la imatge de Ω".[3] I, afegeix Dirichlet poc després, "sobre aquesta capacitat

---

[1] *Ibid.*, 153.
[2] *Wang 1957*, 150.
[3] *Dirichlet 1863*, 470.

de l’esperit [...] de posar en relació ω amb ω’ reposa també tota la ciència dels nombres”.[1] Seguint de prop Dirichlet, Dedekind defineix la noció d’*aplicació* com segueix:

> Hom entén per una aplicació φ d’un sistema S una llei segons la qual a cada element determinat s de S li correspon una cosa determinada, que s’anomena la imatge de s i es designa per $\varphi(s)$.[2]

En la definició anterior i al llarg de tot el paràgraf, Dedekind considera implícitament aplicacions d’un sistema en si mateix, car aquest cas és el que l’interessa per introduir la noció de cadena, encara que més endavant considerarà el cas general d’una aplicació φ d’un conjunt S en un altre conjunt Z qualsevol. Remarquem també que la definició dedekindiana d’aplicació pressuposa la seva teoria de sistemes o conjunts i, per tant, difereix essencialment de les definicions de Frege i Russell, que descansen sobre la seva lògica de relacions. En la mateixa secció, Dedekind defineix la restricció d’una aplicació i la composició d’aplicacions, i demostra alguns teoremes generals sobre les aplicacions com, per exemple, l’associativitat de la composició d’aplicacions.

La tercera secció de *Was sind* es titula *Semblança d’una aplicació. Sistemes semblants* [*Ähnlichkeit einer Abbildung. Ähnliche Systeme*]. L’operació successor que ordena la sèrie dels nombres naturals havia dut Dedekind a introduir en la secció anterior la noció general d’una aplicació φ. Ara bé, tal com assenyala Dedekind a Keferstein, “donats dos nombres diferents *a*, *b*, els seus successors *a*’, *b*’ són també diferents; l’aplicació φ té, per tant, el caràcter d’univocitat [*deutlichkeit*] o semblança”.[3] Segons Dedekind, “una aplicació φ s’anomena semblant (o unívoca), si a elements diferents *a*,*b* del sistema *S* els corresponen sempre imatges diferents $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$”.[4] Avui en dia anomenem una aplicació d’aquesta mena injectiva. Com que, a més, φ és una aplicació de S en $S' = \varphi(S)$, llavors també és exhaustiva i, per tant, φ és una aplicació bijectiva. D’aquí que hom pugui definir una aplicació inversa [*umgekehrte Abbildung*] $\bar{\varphi}$ tal que “a cada element s' de S' li correspon la imatge $\bar{\varphi}(s') = s$”.[5] Hom té evidentment, continua Dedekind, que $\bar{\varphi}$ és semblant o injectiva -de fet, també és exhaustiva-, $\bar{\varphi}(S') = S$, $\bar{\varphi}\bar{\varphi} = \varphi$ i, finalment, que $\varphi\bar{\varphi}$ és l’aplicació idèntica en S.[6]

[1] *Ibid.*, 470.
[2] *Dedekind 1932*, 348.
[3] *Wang 1957*, 150.
[4] *Dedekind 1932*, 350.
[5] *Ibid.*, 350.
[6] *Ibid.*, 350.

Després d'enunciar alguns teoremes relatius a les aplicacions semblants, Dedekind defineix la *semblança* entre sistemes en els termes següents: "els sistemes R, S s'anomenen semblants si hi ha una aplicació d'aquesta mena [*i.e.* semblant] φ de S [en R] tal que $\varphi(S) = R$ i també $\bar{\varphi}(R) = S$".[1] És a dir, que dos sistemes o conjunts són semblants o, com diríem avui en dia, *equipotents*, si hi ha entre ells una aplicació bijectiva φ tal que $\varphi(S) = R$. Evidentment la relació de semblança entre sistemes és reflexiva i simètrica. Dedekind demostra a més que és transitiva, d'on resulta que:

> Hom pot repartir tots els sistemes en classes, recollint en una classe determinada tots els sistemes Q, R, S, … que són semblants a un sistema concret R, el representant de la classe, i només a ell.[2]

Tal com ha assenyalat Dugac, "Dedekind no sospita evidentment que hom és aquí en presencia d'una paradoxa, que hom retrobarà a propòsit del seu teorema d'*existència* d'un conjunt infinit, paradoxa deguda a la noció de conjunt de tots els conjunts sobre el qual hom defineix la relació d'equivalència".[3] Remarquem, d'una altra banda, que el fet que la relació de semblança sigui una relació d'equivalència és a la base de la definició dedekindiana de nombre cardinal, encara que, tal com veurem més endavant, Dedekind preferirà identificar els nombres cardinals amb els representants de les classes d'equivalència, més que no pas amb les mateixes classes. Així doncs, la noció d'aplicació semblant permetrà, d'una banda, definir la noció de nombre cardinal i, d'una altra, definir en la secció següent la noció de cadena i, a partir d'ella, construir el sistema dels nombres naturals.

4. La noció de cadena. La inducció

La secció quarta de *Was sind* es titula *Aplicació d'un sistema en si mateix* [*Abbildung eines Systems in sich selbst*], però el seu objectiu fonamental és introduir i estudiar les propietats bàsiques de la noció de *cadena*, la qual constitueix, juntament amb les nocions d'*ideal* i *tall*, una de les nocions més innovadores i fructíferes de la matemàtica

[1] *Ibid.*, 351.
[2] *Ibid.*, 351.
[3] *Dugac 1976*, 85.

dedekindiana. A tal efecte, Dedekind diu primer de tot que una aplicació φ -semblant o no- és una aplicació de *S en Z* -on *S* i *Z* són sistemes qualssevol- si $\varphi(S) \subseteq Z$; d'aquí que, continua Dedekind, "anomenem φ una aplicació de *S en si mateix* si $\varphi(S) \subseteq S$".[1] Si φ és una aplicació de *S en S* i $K \subseteq S$, llavors Dedekind dirà que *K* és una *cadena* [*Kette*] si $\varphi(K) = K' \subseteq K$. Dedekind remarca de seguida que aquesta definició fa intervenir l'aplicació φ i que "en relació a una altra aplicació del sistema *S* en si mateix, *K* pot perfectament no ser cap cadena".[2] Per exemple, tal com ha assenyalat Dugac, si $S = \mathbb{R}$ i $K = [0, \pi]$, *K* és una cadena en relació a l'aplicació $\sin x$, però no ho és pas en relació a $\cos x$.[3] Entre els teoremes més importants demostrats per Dedekind en relació a la noció de cadena destaquen els que expressen que la imatge d'una cadena és una cadena (teorema 39) i que la unió i intersecció de cadenes és també una cadena (teoremes 41 i 43 respectivament).

La noció de *cadena*, tal com dèiem abans, és a la base de la construcció dedekidiana dels nombres naturals. Per això, Dedekind defineix primer la noció de cadena d'un sistema *A* o, simplement, la *cadena de A*: Si $A \subseteq S$, llavors la cadena de *A*, en símbols A_0, és la intersecció de totes les cadenes -relatives a una aplicació φ- que contenen *A*. Tal com observa Dedekind, aquesta intersecció sempre existeix, perquè *A* està inclosa en cada una d'aquestes cadenes, i és alhora una cadena, perquè la intersecció de cadenes és sempre una cadena (43). Dedekind demostra a continuació les tres propietats següents: $A \subseteq A_0$ (45), $(A_0)' \subseteq A$ (46) i, si $A \subseteq K$ i és una cadena, llavors $A_0 \subseteq K$ (47), les quals "caracteritzen completament" el concepte de cadena (48). Dedekind demostra també que $(A_0)' = (A')_0$ (57), és a dir, que la imatge de la cadena d'un sistema és la cadena de la seva imatge. Tenim així, per (45), (46) i (57), que $(A_0)' \subseteq A_0$, $(A_0)'' \subseteq A_0$, $(A_0)''' \subseteq A_0$, etc. Aquesta possibilitat d'iteració infinita és bàsica per a la construcció de la sèrie dels nombres naturals, car *N* és intuïtivament la cadena del 1 per l'aplicació successor i la definició dedekindiana dels nombres naturals haurà de reflectir aquest fet. Gràcies a les propietats de la cadena d'un sistema, Dedekind demostra també l'anomenat *teorema d'inducció completa* (59), que enuncia així:

> Per demostrar que la cadena A_0 és part d'un sistema Σ [...] , n'hi ha prou en demostrar que:
>
> ρ. $A \subseteq \Sigma$, i

[1] *Dedekind 1932*, 352.
[2] *Ibid.*, 352.
[3] *Dugac 1976*, 86.

> σ. La imatge de tot element comú de A_0 i Σ és, així mateix, element de Σ.[1]

Tal com remarca el mateix Dedekind, el teorema anterior és important perquè constitueix el fonament de les demostracions per inducció completa, tan habituals en matemàtiques, i pot expressar-se també de la manera següent (60):

> Per demostrar que tots els elements de la cadena A_0 posseeixen una determinada propietat $\mathfrak{I}$ [...] n'hi ha prou a demostrar que:
>
> ρ. tots els elements a del sistema A posseeixen la propietat $\mathfrak{I}$ (o que $\mathfrak{I}$ val per a tot a), i
>
> σ. A la imatge n' de tot element a de A_0 que posseeix la propietat $\mathfrak{I}$, li correspon la mateixa propietat.[2]

De fet, continua Dedekind, l'equivalència d'ambdues formulacions del teorema d'inducció completa esdevé evident, si "hom designa amb Σ el sistema de totes les coses que posseeixen la propietat $\mathfrak{I}$".[3] Ara bé, això només és possible en presencia de l'*axioma de comprehensió* que, tal com veurem més endavant, és el culpable que es pugui generar en el sistema lògic de Frege la paradoxa de Russell. Dedekind demostrarà més endavant el teorema d'inducció completa per al cas concret dels nombres naturals (80) -el pas de n a $n+1$-, així com també el teorema de definició per inducció (126), tot remarcant en una interessant nota (130) les diferències que hi ha, malgrat les aparents semblances, entre els diferents teoremes d'inducció completa (59, 60 i 80) i el teorema de definició per inducció (126).

5. Sistemes finits i infinits

La secció cinquena de *Was sind* es titula *El finit i l'infinit* [*Das Endliche und Unendliche*] i comença amb la cèlebre definició dedekindiana de conjunt infinit:

---

[1] *Dedekind 1932*, 354-55.
[2] *Ibid.*, 355.
[3] *Ibid.*, 355.

> Un sistema *S* es diu infinit si és semblant a una part pròpia seva; en cas contrari, s'anomena un sistema finit.[1]

És a dir, que un conjunt *S* és infinit si hi ha una aplicació semblant o injectiva φ de *S* en *S* i un element de *S* que no pertany al rang de φ, de manera que $\varphi(S) \subsetneq S$. En la carta a Keferstein de 27/02/1890, Dedekind justifica intuïtivament la definició anterior observant que en la sèrie *N* dels nombres naturals "no tot nombre és un successor *n*', *i.e.* $\varphi(N)$ és una part pròpia de *N*", la qual cosa juntament amb el fet que l'aplicació φ és semblant, "expressa la infinitud de la sèrie *N* dels nombres".[2] Tal com assenyala Dedekind en el pròleg a la segona edició de *Was sind*, Bolzano[3] i Cantor[4] ja havien assenyalat com a propietat específica dels sistemes infinits el fet que són bijectables amb una part pròpia seva, "però cap dels autors esmentats ha provat de transformar aquesta propietat en definició de l'infinit".[5] Dedekind, en canvi, no fa cap esment de Peirce, l'obra del qual segurament desconeixia, i que havia presentat en els articles "On the Logic of Number" i "On the Algebra of Logic", publicats a l'*American Journal of Mathematics* els anys 1881 i 1885 respectivament, una definició equivalent de conjunt infinit.[6] Deixant de banda les qüestions relatives a la filiació històrica de la definició de Dedekind i la prioritat cronològica de la definició peirciana o dedekindiana, el fet que Dedekind fos capaç de definir el concepte de conjunt infinit és del tot remarcable, donat el lloc central que aquest concepte ocupa, gràcies sobretot a l'obra de Cantor, a les matemàtiques modernes. En aquest sentit, el fet que Dedekind defineixi la noció de conjunt finit a partir de la de conjunt infinit i que basteixi a partir d'aquesta última l'aritmètica i l'anàlisi és un signe més de la modernitat de la matemàtica dedekindiana. Destaquem finalment que la definició de Dedekind de conjunt infinit ha esdevingut clàssica avui en dia i hom distingeix entre un conjunt infinit en el sentit de Dedekind -és a dir, un conjunt que satisfà les condicions esmentades en la definició dedekindiana de conjunt infinit- i un conjunt infinit en el sentit habitual -és a dir, un conjunt equipotent a *N*. La raó d'aquesta distinció és que hom pot demostrar en teoria de conjunts que tot conjunt infinit és infinit de

---

[1] *Ibid.*, 356.
[2] *Wang 1957*, 150.
[3] *Bolzano 1955*, 27-28 (§ 20).
[4] *Cantor 1966*, 119.
[5] *Dedekind 1932*, 342.
[6] Amb tot, Peirce assegurava haver enviat a Dedekind l'article de 1881. En el capítol dedicat a Peirce, ja hem fet una comparació de les definicions de conjunt infinit i de l'axiomatització de l'aritmètica d'ambdós autors (*Cf. supra*, cap. III, § 7).

Dedekind, però el recíproc només és cert si afegim a la nostra teoria de conjunts l'axioma d'elecció.

L'altra fita més important de la secció cinquena de *Was sind* és la demostració de l'existència d'un sistema o conjunt infinit (66). Una vegada fet això, Dedekind caracteritzarà en la secció següent la noció de sistema simplement infinit i demostrarà que tot sistema infinit conté un sistema simplement infinit (72). D'aquesta manera queda assegurada l'existència dels conjunts simplement infinits, a partir dels quals definirà per abstracció el conjunt N dels nombres naturals. Això explica la necessitat del teorema d'existència (66), tal com reconeix el propi Dedekind en la coneguda carta a Keferstein de 28/02/1890:

> Després d'haver especificat en la meva anàlisi els caràcters essencials d'un sistema simplement infinit (71, 73), del qual la sèrie dels nombres naturals en constitueix un tipus abstracte, es planteja la qüestió de saber si hi ha un sistema d'aquesta mena en l'univers dels nostres pensament. Sense prova d'existència lògica hom no podria decidir si un sistema com aquest està lliure de contradiccions internes.[1]

La demostració del teorema 66 és la següent:

> El món dels meus pensaments [*Gedankenwelt*], *i.e.* la totalitat S de totes les coses que poden ser objecte del meu pensament, és infinit. Car si s representa un element de S, llavors el pensament s' que S pot ser objecte del meu pensament, és ell mateix un element de S. Si hom considera s' com la imatge $\varphi(S)$ de l'element s, l'aplicació φ de S així definida té la propietat que l'imatge S' és part de S; de fet, S' és una part pròpia de S, car en S hi ha elements (per exemple, el meu propi jo [*mein eigenes Ich*]) que són distints de tot pensament s' d'aquesta mena i, per això, no estan continguts en S'. Finalment, sembla evident que si a,b són elements diferents de S, també les seves imatges a', b' són diferents i, doncs, que l'aplicació φ és unívoca (semblant). Així doncs, S és infinit, q.e.d.[2]

El teorema d'existència d'un conjunt infinit i llur demostració no figuren a l'esborrany de 1872-8 de *Was sind* i, segons reconeix el propi Dedekind, aquesta demostració és molt semblant a la demostració del mateix teorema feta per Bolzano a *Paradoxien von*

---

[1] *Wang 1957*, 151.

[2] *Dedekind 1932*, 357.

Unendlichen (§ 13). De fet, una carta inèdita de Cantor a Dedekind de 7/10/1882[1] mostra clarament que el primer havia enviat al segon l'obra esmentada de Bolzano, la qual cosa confirmaria llavors que fou la lectura d'aquesta obra la que suggerí a Dedekind la possibilitat de demostrar l'existència d'un conjunt infinit i la que inspirà directament la demostració de Dedekind. L'esquema d'aquesta demostració és el següent: Dedekind considera primer un conjunt S -el conjunt de tots els objectes del meu pensament- i una aplicació φ de S en S que fa correspondre a un element s de S el pensament $s' = \varphi(s)$ que s és un objecte del seu pensament. Dedekind "demostra" llavors que (*i*) $\varphi(S) \subsetneq S$, car, d'una banda, l'aplicació iterada de la funció φ a un element $s_0 \in S$ dóna de nou un element $s_n \in S$ i, d'una altra banda, hi ha elements $s \in S$ -per exemple, *el meu propi jo*- que no són imatges de cap element$s_0 \in S$; i (*ii*) Si $a, b \in S$ i $a \neq b$, llavors $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, *i.e.* φ és semblant. D'aquí se segueix, d'acord amb la definició 64, que S és infinit. Ara bé, aquesta demostració presenta diversos punts foscos, car tant l'existència d'un sistema S de tots els meus pensaments, com el fet que *el meu propi jo* pertanyi a S però no sigui accessible per la funció φ "pensament de", o el fet que si dos pensament són diferents, llavors llur imatge per φ també serà diferent, no són en absolut evidents i requeririen una justificació. De fet, la demostració de Dedekind ja fou criticada per alguns autors il·lustres de la seva generació com, per exemple, Cantor o Frege, i de la generació següent com, per exemple, Hessenberg o Russell. Frege, en un article inèdit titulat simplement "Logik" (*1897*) sembla reconèixer la validesa de la demostració dedekindiana, sempre i quan hom interpreti els pensaments com quelcom objectiu car, si bé és possible que els primers membres de la sèrie $s, \varphi(s), \varphi(\varphi(s)), \ldots$ tinguin significat, "a mida que progressem en la sèrie per força arribarem finalment a un membre que no tingui cap significat, perquè el pensament que se suposa que designa no ha estat pensat".[2] Així, conclou Frege, "la validesa de la prova de Dedekind descansa en la hipòtesi que els pensaments són independents del nostre pensament".[3] El judici de Russell anirà variant amb el pas del temps. Així, si a *Principles of Mathematics* de 1903, troba correcta la demostració de Dedekind i considera que l'existència d'un conjunt infinit és tan evident que "a penes pot ser negada", en l'article "The Axiom of Infinity" de 1904, si bé encara està convençut que és possible demostrar lògicament l'existència d'un conjunt infinit, considera també que alguns elements de la demostració de Dedekind "no són apropiats per a les matemàtiques pures" perquè "suposen

[1] *Cf. Dugac 1976*, 256.
[2] *Frege 1969*, 148, n. B.
[3] *Ibid.*, 148, n. B.

premisses que no són demostrables matemàticament".[1] Finalment, en el seu llibre *Introduction to Mathematical Philosophy* de 1919, Russell afirma que l'argument de Dedekind conté diversos errors que obliguen a rebutjar-lo[2] i conclou que si bé "l'infinit no és auto-contradictori, tampoc és lògicament demostrable".[3] Seguint les passes de Frege, Russell afirma que la sèrie generada per la funció "pensament de" -o "idea de" en la terminologia de Russell- no està justificada si considerem que "totes aquestes idees tenen, de fet, una existència empírica en la ment de la gent".[4] Ara bé, si aquests pensaments o idees no són ocurrències físiques, llavors han de ser entitats abstractes a la manera de les idees platòniques, "però llavors esdevé dubtós tot d'una si hi ha idees d'aquesta mena o, si hem de concloure que n'hi ha, ho haurem de fer en base a alguna teoria lògica, demostrant que és necessari que hi hagi per cada cosa una idea seva".[5] Però, continua Russell, si analitzem lògicament l'aplicació "idea de", llavors ens adonem que o bé es redueix a l'aplicació *identitat* o bé és una *descripció definida*. Ara bé, en el primer cas, l'argument falla perquè és essencial a la prova de reflexivitat que objecte i idea siguin distints;[6] i, en el segon cas, l'argument també falla, perquè la relació entre objecte i descripció definida no és semblant (injectiva), car "hi ha innumerables descripcions correctes de qualsevol objecte".[7] En qualsevol cas, les crítiques de Frege i Russell no tenen massa interès històric perquè no arribaren a Dedekind i no posen en qüestió cap dels supòsits conjuntistes en que es recolza aquella demostració. No s'esdevé així, en canvi, amb les crítiques que Cantor i Hessenberg adreçaren a la demostració de Dedekind. El primer, en una carta adreçada a Dedekind a 28/07/1899, distingirà entre pluralitats absolutament infinites o inconsistents i pluralitats consistents o conjunts, i posarà com exemple de les primeres "la col·lecció de tot allò pensable",[8] de la qual parteix la demostració de Dedekind. Recordem, en efecte, que tot sistema o conjunt és un objecte del pensament i que, per tant, la hipòtesi de l'existència del *Gedankenwelt* de Dedekind és equivalent a la hipòtesi de l'existència del conjunt de tots els conjunts, la qual cosa ens mena a una contradicció lògica, anàloga a la que ens mena la consideració del conjunt de tots els ordinals o de tots els cardinals, contradiccions que Cantor pensava resoldre en base a la distinció entre pluralitats consistents i inconsistents abans

[1] *Russell 1994*, 477.
[2] *Cf. Russell 1919*, 139-40.
[3] *Ibid.*, 141.
[4] *Ibid.*, 139.
[5] *Ibid.*, 139.
[6] Russell entén per una "reflexió" una aplicació φ de S en S tal que $\varphi(s) \subsetneq S$.
[7] *Ibid.*, 139-40.
[8] *Cantor 1966*, 443.

esmentada. És interessant remarcar, si més no des d'un punt de vista històric, que Felix Bernstein visità Dedekind el 1897 per comunicar-li, a instàncies de Cantor, que la paradoxa del conjunt de tots els ordinals també podia aplicar-se al conjunt de totes les coses i que "aquest havia estat emprat per Dedekind en el seu escrit *Was sind und was sollen die Zahlen* per demostrar l'existència de conjunts infinits i que la definició dels nombres depenia, segons la construcció del seu escrit, de l'existència lliure de contradicció d'aquest conjunt".[1] D'acord amb Bernstein, "Dedekind no havia arribat llavors a una opinió definitiva" i li va confessar que "en les seves reflexions havia arribat quasi bé a dubtar si el pensament humà seria completament racional".[2] La crítica de Cantor a la demostració de Dedekind serà compartida també per Hessenberg i, tal com veurem més endavant, per Zermelo. Remarquem, finalment, que Dedekind reconeixerà en el pròleg a la tercera edició de *Was sind* "la importància i parcial legitimitat de les crítiques anteriors", però reafirmarà "la seva confiança en l'harmonia interna de la nostra lògica" i en que "una recerca rigorosa del poder creatiu de l'esperit, el qual a partir de determinats elements forma un nou objecte determinat, el seu sistema, necessàriament distint de cada un d'aquests elements, conduirà ben segur a una organització irreprotxable dels fonaments del meu escrit".[3] El desenvolupament per part de Zermelo i altres de la teoria axiomàtica de conjunts confirmarà que la confiança de Dedekind era del tot justificada.

6. La definició dels nombres naturals

La secció sisena de *Was sind* es titula *Einfach unendliche Systeme. Reihe der natürlichen Zahlen* [*Sistemes simplement infinits. Sèrie dels nombres naturals*] i comença amb la definició d'un sistema simplement infinit (71):

> Un sistema N es diu *simplement infinit* si hi ha una aplicació semblant φ de N en si mateix, tal que N apareix com a cadena d'un element que no està contingut en $\varphi(N)$. Anomenarem aquest element, que designarem a partir d'ara amb el símbol 1, l'*element fonamental* [*Grundelement*] de N i direm al mateix temps que el sistema

[1] Citat per E. Noether a *Dedekind 1932*, 449.
[2] *Ibid.*, 449.
[3] *Ibid.*, 343.

simplement infinit N està ordenat per aquesta aplicació φ [...] L'essència d'un sistema simplement infinit N consisteix en l'existència d'una aplicació φ de N i un element 1, que satisfan les condicions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ següents:

α. $N' \subseteq N$.

β. $N = 1_0$.

γ. L'element 1 no està contingut en N'.

δ. L'aplicació φ és semblant.[1]

Tal com observa el mateix Dedekind, de α, β, γ i δ se segueix immediatament que tot sistema simplement infinit és infinit. Hom obté també fàcilment que tot sistema infinit conté un sistema simplement infinit (72). Aquest teorema i el teorema d'existència d'un conjunt infinit (66) asseguren l'existència de conjunts simplement infinits, a partir dels quals Dedekind podrà definir per abstracció la sèrie dels nombres naturals (73):

> Si en considerar un sistema simplement infinit N ordenat per una aplicació φ, hom prescindeix totalment de la naturalesa concreta dels elements, únicament es fixa en allò que els diferencia i només considera les relacions que estableix entre ells l'aplicació φ que defineix l'ordre, llavors aquests elements es diuen *nombres naturals* o *nombres ordinals* o també, simplement, *nombres*, i l'element fonamental 1 es diu el *nombre fonamental de la sèrie de nombres N*. Tenint en compte aquest alliberament dels elements de qualsevol altre contingut (Abstracció), hom té tot el dret a anomenar els nombres una lliure creació de l'esperit humà.[2]

Veiem, doncs, que Dedekind no defineix explícitament els nombres naturals, sinó que defineix unes estructures de tipus conjuntista -els sistemes simplement infinits- a partir de les propietats que hom atribueix habitualment als nombres naturals i, finalment, obté aquests per *abstracció mental*. Més endavant explicarem la importància d'aquesta pràctica definicional per a la filosofia de la matemàtica dedekindiana i les crítiques que rebran per part de Frege i Russell les definicions per abstracció i, en particular, la definició anterior. Però, en qualsevol cas, s'ha de tenir en compte que, tal com afirma el mateix Dedekind, la definició del concepte de nombre posada a 73, només resta completament justificada a partir de la desena secció.[3] En aquesta secció, titulada *Die Klasse der einfach unendlichen Systeme* [*La classe dels*

---

[1] *Ibid.*, 359.
[2] *Ibid.*, 360.
[3] *Cf. ibid.*, 378.

sistemes simplement infinits], Dedekind demostrarà que tots els sistemes simplement infinits són semblants -equipotents- a N i, per tant, són semblants entre si (132), i que tot sistema Ω semblant a un sistema simplement infinit -i, per tant, a N- és també simplement infinit (133). En realitat, com que N i Ω estan ordenats respectivament per les aplicacions φ i ϕ, l'aplicació ψ que permet establir l'equipotència de N i Ω serà un isomorfisme entre les estructures d'ordre $\langle N, \varphi \rangle$ i $\langle \Omega, \phi \rangle$.[1] D'aquí resulta que (134): "tot els teoremes sobre els nombres, és a dir, sobre elements n del sistema simplement infinit N ordenat per l'aplicació φ [...] posseeixen també validesa general per qualsevol altra sistema simplement infinit ordenat per una aplicació ϕ i els seus elements v".[2] Això justifica l'afirmació de la sisena secció (73) segons la qual:

> Les relacions o lleis que es deriven per si soles de les condicions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de 71 i que, per això, són sempre les mateixes en tots els sistemes ordenats simplement infinits, siguin quins siguin els noms que corresponguin casualment a cada un d'aquests elements, constitueixen l'objecte immediat de la *ciència dels nombres* o *aritmètica*.[3]

Així doncs, l'objecte d'estudi de l'aritmètica són els enunciats que són vertaders en qualsevol conjunt simplement infinit. Dit d'una manera més tècnica, l'aritmètica o teoria de nombres és la teoria d'una classe d'estructures K -els conjunts simplement infinits- isomorfes entre elles i axiomatitzades per les condicions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Per a Dedekind, la sèrie dels nombres naturals N serà llavors un model *abstracte* o *formal* d'aquesta classe d'estructures,[4] encara que en alguna ocasió parli també de N com un model particular dels axiomes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *-i.e.* com l'estructura $\langle N, \varphi, 1 \rangle$, on N és la cadena del 1 per l'aplicació successor φ. Per a Dedekind, en definitiva, els nombres naturals o ordinals són "els elements abstractes d'un sistema ordenat simplement infinit"[5] i no tenen, per tant, cap altra propietat que la seva posició en una sèrie o progressió i les propietats que es deriven d'aquesta. El problema que planteja aquesta concepció formalista dels nombres és si amb ella s'aconsegueix definir els nombres naturals

[1] Dedekind definirà aquesta aplicació i demostrarà la seva existència i unicitat en el teorema 126, que estudiarem més endavant.
[2] *Ibid.*, 377-78.
[3] *Ibid.*, 360.
[4] Tal com explica Dummett, Dedekind parla dels nombres naturals com un algebrista parla, per exemple, del reticle no modular de cinc elements per referir-se a qualsevol estructura de la classe dels reticles en qüestió (*Cf. Dummett 1991*, cap. 5).
[5] *Dedekind 1932*, 489.

com objectes d'alguna mena. Segons Russell, Dedekind no hauria reeixit en assolir aquest objectiu:

> El que Dedekind ens presenta no són els nombres, sinó qualsevol progressió: el que diu és vàlid igualment per a totes les progressions i les seves demostracions en cap lloc -ni tan sols quan arriba als cardinals- inclouen cap propietat que permetin distingir els nombres de qualsevol altra progressió. No ens presenta cap evidència que els nombres tinguin prioritat respecte a les altres progressions. Se'ns diu, de fet, que són el que tenen en comú totes les progressions; però no se'ns dóna cap raó per pensar que les progressions tenen res en comú més enllà de les propietats assignades en la definició, les quals no constitueixen per si mateixes una nova progressió.[1]

Veiem, doncs, que Russell rebutja que hom pugui identificar els nombres únicament en termes de les propietats estructurals que posseeixen en virtut de la seva posició en una sèrie o progressió, car aquestes no ens permeten distingir els nombres naturals o ordinals dels elements d'una altra progressió qualsevol -per exemple, els ordinals transfinits o els cardinals. Segons Russell, en efecte:

> És impossible que, tal com Dedekind suggereix, els ordinals no siguin sinó els termes de la mena de relacions que constitueixen progressions. Si han de ser qualsevol cosa, han de ser intrínsecament alguna cosa; han de diferir d'altres entitats com els punts dels instants, o els colors dels sons.[2]

Russell té raó evidentment si adoptem el punt de vista segons el qual els nombres han de ser objectes d'alguna mena definits lògicament. Aquesta és una tesi bàsica del logicisme de Frege i Russell i d'aquí la crítica d'aquest últim a la definició dedekindiana dels nombres naturals. Dedekind, en efecte, defineix implícitament -a través d'axiomes o postulats- els nombres; però aquesta mena de definicions només defineixen un concepte estructuralment, això és, especificant-ne les seves propietats formals o estructurals. D'aquí que aquestes definicions no permetin definir els nombres, tal com voldria Russell, com "una classe d'entitats que tenen, o són, per si mateixes, d'una naturalesa genuïna, i són lògicament independents de la manera com s'han definit".[3] Per un altre costat, aquestes definicions són

---

[1] *Russell 1903*, 243.
[2] *Ibid.*, 242.
[3] *Ibid.*, 242.

ambigües pel que fa a la seva *interpretació*, perquè, tal com vèiem abans, hi ha infinits sistemes d'objectes que satisfan les condicions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de Dedekind, i encara que tots aquests sistemes siguin isomorfs, sempre serà possible argumentar *à la Russell* que aquest axiomes no permeten capturar de forma unívoca el sistema dels nombres naturals, això és, definir-lo com un sistema d'objectes genuïns i unívocament determinats. Per això caldria interpretar "1" com el nombre 1 i "φ" com l'aplicació successor, i definir N com la cadena del 1 per l'aplicació successor. Això evidentment no és incompatible amb la tesi logicista de Dedekind, sempre i quan puguem definir l'element fonamental [*Urelemente*] i l'aplicació successor en termes de la seva teoria de conjunts o *Systemlehre*.[1] Això és perfectament possible i, de fet, és el que es fa habitualment avui en dia en el marc de la teoria de conjunt de Zermelo-Fraenkel. Ara bé, Dedekind no pretén en cap moment definir els nombres naturals en aquest sentit i difícilment podria fer-ho, donat que en la seva *Systemlehre* no introdueix el conjunt buit ni la distinció entre element i singletó, que són bàsics per definir l'element fonamental i l'aplicació successor. En realitat, aquest enfocament conjuntista, si bé és present d'alguna manera a *Was sind* -com ho mostra el fet que alguna vegada Dedekind identifiqui els nombres naturals amb la cadena del 1 per l'aplicació successor i que el mateix Zermelo reconegui haver-se inspirat en aquella obra a l'hora de desenvolupar la seva teoria de conjunts-, es troba clarament superat per l'enfocament estructuralista o formalista -no debades Peano ha reconegut haver-se inspirat en aquesta obra per tal de desenvolupar la seva coneguda axiomatització de l'aritmètica. En definitiva, Russell té raó en afirmar que Dedekind no defineix els nombres naturals, sinó només un sistema formal que satisfan certes estructures matemàtiques i, en particular, els nombres naturals. És cert, d'una altra banda, que aquest sistema axiomàtic és *categòric* (si el principi d'inducció es formula en segon ordre), allò que fa que tots els teoremes vàlids en una estructura siguin també vàlids en qualsevol altra estructura que sigui un model dels axiomes. Aquest resultat, conegut habitualment com teorema de Dedekind, és important, car demostra l'adequació de la caracterització dedekindiana dels nombres naturals per certs propòsits, però no pas per a una fonamentació lògica de les matemàtiques com la que cerquen Frege o Russell, la qual requereix que els nombres es defineixin com objectes d'un tipus determinat, a saber, com objectes lògics. Remarquem finalment que la concepció formalista present ja a la construcció dels nombre naturals a *Was sind*, durà Dedekind a partir de 1890 a centrar-se en l'estudi de

[1] No hi ha cap mena de dubte que Dedekind considerava la teoria de conjunts com una part de la lògica, car el seu programa "logicista" consisteix essencialment a desenvolupar l'àlgebra i l'anàlisi a partir dels conceptes de la seva *Systemlehre*.

les estructures i els morfismes d'estructures, tema que ha estudiat Dugac en l'obra *Richard Dedekind et les fondaments des mathématiques* (*1976*). Una altra qüestió que paga la pena esmentar ara i que constitueix, de fet, el nucli de la polèmica entre Dedekind i Keferstein que donà lloc a la coneguda correspondència entre tots dos autors, és la següent: Tal com acabem de veure, Dedekind defineix el conjunt N dels nombres naturals com un model abstracte -un representant- de la classe d'estructures definida pels axiomes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Hom podria preguntar-se llavors si es pot prescindir d'alguna d'aquestes condicions per a la caracterització dels nombres naturals. A tal efecte, Keferstein havia proposat definir la noció de conjunt simplement infinit sense fer referència a la noció de cadena de l'element 1 i, per tant, caracteritzant N només a través de les condicions α, γ, δ. Dedekind però respondrà taxativament en una primera lletra a Keferstein que serveix d'introducció a l'article "Über den Begriff des Unendlichen", que si hom acceptés aquesta o qualsevol altra de les preteses millores suggerides per Keferstein, "no restaria d'un edifici sàviament acabat [...] sinó un munt de runes sense cap valor per a l'elaboració de la ciència dels nombres".[1] Així, en la lletra a Keferstein de 27/02/1890, una vegada introduïdes les condicions α, γ, δ que, segons Keferstein, haurien estat suficients per caracteritzar un sistema simplement infinit -i el mateix conjunt N dels nombres naturals- Dedekind comenta que:

> Aquests fets estan lluny de ser suficients per a la descripció integral d'allò que constitueix la sèrie N dels sencers. Car són verificats per tot sistema S que contingui, a més de la sèrie N dels sencers, un sistema T d'elements arbitraris t als quals hom pugui estendre l'aplicació φ, de manera que aquesta aplicació sigui sempre semblant i que $\varphi(T) = T$. Però és evident que aquest sistema es distingeix totalment de la sèrie N dels nombres usuals, car hom podria escollir-lo de manera que a penes es preservés en ell cap teorema de l'aritmètica. Què caldrà afegir llavors a les propietats ja enumerades per a que el sistema S estigui lliure d'elements estranys i irregulars t, per a que es restringeixi a N?[2]

Suposem, en efecte, que S és un conjunt simplement infinit en el sentit de Keferstein. Llavors hi haurà una aplicació φ de S en S tal que $\varphi(S) \subsetneq S$ (α), $1 \notin \varphi(S)$ (γ) i φ és semblant(δ) . Sigui $N = 1_0$, llavors N és simplement infinit en el sentit de Dedekind i Keferstein i, a més, $N \subseteq S$. Sigui T el conjunt dels elements de S que no pertanyen a N, φ' l'aplicació de S en S tal

[1] Citat a *Rivenc i Rouilhan 1992*, 174.
[2] *Wang 1957*, 150.

que la seva restricció a N és idèntica a φ i la seva restricció a T és l'aplicació identitat en T. Llavors φ' és una aplicació semblant de S en S i $\varphi'(S) = \varphi'(N) \cup \varphi'(T) = \varphi(N) \cup T$. Així doncs, S és un conjunt simplement infinit en el sentit de Keferstein, però conté una sèrie d'elements estranys t que no tenen cap relació amb N -en el sentit que no estan ordenats per l'aplicació φ. D'aquí l'exigència, per tal d'evitar aquests elements, de considerar els conjunts simplement infinits -el tipus abstracte dels quals és N- com "la intersecció 1_0 o $\phi_0(1)$ de totes les cadenes K (en S) a les quals pertany l'element 1. Només després d'aquest afegitó resta completament determinat el caràcter de la sèrie N".[1] Una vegada definida la sèrie N dels nombres naturals, Dedekind pot enunciar el *teorema d'inducció completa* per aquests nombres (80), el qual constitueix, com ja s'ha dit, un cas particular del teorema d'inducció completa (59). Gràcies a ell, Dedekind podrà demostrar l'important teorema segons el qual tot nombre és diferent del seu successor (81).

7. Definició recursiva de les operacions elementals

La secció setena de *Was sind* es titula *Größere und kleinere Zahlen* [*Nombres més grans i més petits*] i el seu objectiu bàsic és, com indica el mateix títol, definir les relacions *més gran que* i *més petit que* en els nombres naturals. Això és possible gràcies a la noció de cadena: Dedekind dirà que m és *més petit* que n ($m < n$) o n és *més gran que* m ($n > m$) si $n_0 \subseteq m'_0$ (89). La relació < (o >), així definida en N, satisfà la llei de *tricotomia* o, dit d'una altra manera, la relació < (o >) és una relació d'*ordre total* en N (90). D'aquí que Dedekind pugui definir Z_n com "el sistema de tots els nombres no més grans que n, o sia, que no estan continguts en n'_0" (98).[2] Tal com veurem més endavant, el conjunt Z_n o, com diríem avui en dia, el *segment inicial* determinat per n, juga un paper primordial en la definició dedekindiana de la noció de nombre cardinal d'un conjunt.

En la secció vuitena, titulada *Endliche und unendliche Teile der Zahlenreihe* [*Part finites i infinites de la sèrie dels nombres*], Dedekind demostra que tot sistema Z_n és finit (119), que si m i n són nombres diferents, llavors Z_m i Z_n no són semblants -*i.e.* no són equipotents- (120) i que una part T de N serà finita o simplement infinita segons que tingui o

[1] *Ibid.*, 151.
[2] *Dedekind 1932*, 365.

no un element màxim (123). En la secció novena, titulada *Definition einer Abbildung der Zahlenreihe durch Induktion* [*Definició d'una aplicació de la sèrie dels nombres per inducció*], Dedekind enuncia l'important *teorema de definició per inducció* (126):

> Donada una aplicació Θ qualsevol (semblant o no) d'un sistema Ω en si mateix i un element determinat w en Ω, llavors hi ha una i només una aplicació ψ de la sèrie dels nombres N que satisfà les condicions:
>
> I. $\psi(N) \subseteq \Omega$
>
> II. $\psi(1) = w$
>
> III. $\psi(n') = \Theta\psi(n)$, on n designa un nombre qualsevol.[1]

Tal com observa Dedekind en la lletra a Keferstein de 27/02/1890, de la mateixa manera que el *teorema d'inducció completa* forneix en les seves diferents formes (59, 60, 80) "un *mètode de prova* suficient per demostrar, en el cas general, els teoremes vàlids per a *tots* els nombres *n*",[2] el *teorema de definició per inducció* permet "establir, sense contradiccions, les *definicions* de les operacions numèriques per a *tots* els nombres ".[3] La diferència entre un i l'altre rau, segons el mateix Dedekind, en que "mentre que el teorema 59 val de forma totalment general per tota cadena A_0, on A és una part qualsevol d'un sistema S amb una aplicació φ qualsevol en si mateix [...] el teorema 126 [...] només afirma l'existència d'una aplicació ψ lliure de contradicció (o unívoca) del sistema simplement infinit 1_0".[4] De fet, tal com demostra Dedekind tot seguit, si hom pren una cadena qualsevol (semblant o no) en comptes de N, llavors el procediment de definició per inducció porta a una contradicció. Dedekind defineix les operacions d'addició, multiplicació i exponenciació en N en els paràgrafs 11, 12 i 13, emprant com era d'esperar el teorema 126 i substituint Ω per N. Així, per exemple, si hom posa $w = m$, $\Theta(n) = n'$, la suma de m i n $(m+n)$ restarà completament definida, per 126, mitjançant les condicions $(i)\ m+1 = m'$ i $(ii)\ m+n' = (m+n)'$ (135). Anàlogament, si hom posa $w = m$ i $\Theta(n) = m$, llavors la multiplicació de m per n $(m.n)$ restarà completament definida per $(i)\ m.1 = m$ i $(ii)\ m.n' = m.n + m$ (147). Finalment, Dedekind defineix l'exponenciació de forma semblant. A partir de les definicions anteriors de l'addició, multiplicació i exponenciació en N, Dedekind demostrarà en les seccions corresponents les

---

[1] *Ibid.*, 371. $n' = \varphi(n)$, on φ és l'aplicació que ordena N com a sistema simplement infinit.

[2] *Wang 1957*, 151.

[3] *Ibid.*, 151.

[4] *Dedekind 1932*, 373.

propietats habituals de cada una d'aquestes operacions. Tal com hem vist abans, Dedekind no fou el primer en definir recursivament les operacions elementals, car Peirce ja havia definit d'aquesta manera la suma i la multiplicació en el seu article "The Logic of Number" de 1881 (*Cf.* supra, cap. II, § 7). Amb tot, Peirce no justifica en cap moment la validesa general de les definicions d'aquesta mena, cosa que si que fa Dedekind a través del teorema 126, l'anomenat precisament *teorema de definició per inducció*.

8. Nombres cardinals i ordinals

La secció catorzena de *Was sind* es titula *Anzahl der Elemente eines endlichen Systems* [*Nombre d'elements d'un sistema finit*] i en ella Dedekind demostra l'important teorema següent (160): "Un sistema Σ és finit o infinit, segons que hi hagi o no un sistema Z_n semblant".[1] Aquest teorema expressa, en realitat, l'equivalència entre les dues definicions habituals de l'infinit abans esmentada i, per tant, posa el mateix problema que aquella. La seva demostració resulta, en efecte, del teorema (159): "Si T és un conjunt infinit, llavors tot sistema Z_n és semblant a una part de T, i recíprocament".[2] Però, tal com indica Zermelo en l'article "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung" (*1908*$_a$), en la demostració del recíproc, Dedekind fa un ús implícit de l'axioma d'elecció i, per tant, tant la demostració de 159 com la de 160 requereixen la introducció d'aquest axioma.[3] D'una altra banda, tal com acabem de veure, si Σ és un sistema finit, llavors per 160 hi ha un segment $Z_n$semblant a Σ. Ara bé, pel teorema 33, tots els segments semblants a Σ són semblants entre ells i, pel teorema 120, hi ha un *únic* nombre n corresponent a tots i cada un d'aquests segments. D'aquí la definició següent de nombre cardinal (161):

> Si Σ és un sistema finit, hi ha [...] un únic nombre [*Zahl*] n al qual correspon un sistema Z_n semblant al sistema Σ. Aquest nombre n expressa el nombre [*Anzahl*] d'elements continguts en Σ [...] Quan els nombres [*Zahlen*] s'empren per expressar

[1] *Ibid.*, 386.
[2] *Cf. ibid.*, 384.
[3] *Zermelo 1908*$_a$, 114.

> exactament aquesta propietat concreta dels sistemes finits, s'anomenen nombres cardinals [*Kardinalzahlen*].[1]

Una conseqüència immediata de la definició anterior i el teorema 33 és el teorema 162 que afirma que: "tots els sistemes semblants a un sistema finit posseeixen el mateix nombre d'elements",[2] és a dir, el mateix nombre cardinal, la qual cosa permet identificar els nombres cardinals amb la classe de tots els sistemes semblants entre ells. Amb tot, Dedekind escriu a Weber en una lletra de 24/01/1888 que aconsella entendre per nombre cardinal, "no la classe mateixa (el sistema de tots els sistemes finits semblants entre ells), sinó més aviat quelcom de nou (corresponent a aquesta classe) que l'esperit crea".[3] D'aquesta manera, la definició dedekindiana dels nombres cardinals respon perfectament a la seva concepció general dels nombres -naturals, reals ...- com a lliures creacions de l'esperit humà. En qualsevol cas, tal com reconeix Dedekind en la mateixa carta, sempre ha considerat "el [concepte de] nombre ordinal, no pas el de nombre cardinal, com el concepte bàsic de nombre",[4] la qual cosa l'ha dut a concebre "el nombre cardinal com una aplicació del nombre ordinal".[5] De fet, donat que Dedekind identifica els nombres ordinals amb "els elements abstractes d'un sistema ordenat simplement infinit"[6] i, per tant, amb els nombres naturals, la dependència dels nombres cardinals respecte als ordinals resulta clarament de la definició d'aquests. Russell ha explicat molt bé aquesta dependència a *Principles of Mathematics*:

> Donat l'ordre dels ordinals, tot ordinal *n* defineix una classe d'ordinals Z_n que consisteix en tots aquells que no el succeeixen. Podrien definir-se com tots aquells que no estan continguts en l'imatge de la cadena de *n*. Aquesta classe podria ser semblant a una altra classe, de la qual es diu llavors que té el nombre cardinal. Però és només gràcies a l'ordre dels ordinals que cada un d'ells defineix una classe, i així aquest ordre és pressuposat a l'obtenció dels cardinals.[7]

Naturalment, hom podria seguir el camí invers i identificar els nombres naturals amb el nombres cardinals, definint-los com la classe de tots els sistemes finits semblants (Frege,

[1] *Ibid.*, 387.
[2] *Ibid.*, 388.
[3] *Ibid.*, 489.
[4] *Ibid.*, 489.
[5] *Ibid.*, 489.
[6] *Ibid.*, 489.
[7] *Russell 1903*, 240.

Russell) o un representant seu (Dedekind). Ara bé, tal com observa Dedekind en la carta a Weber abans esmentada:

> De la classe se'n diran moltes coses (per exemple, que és un sistema infinit d'elements, a saber, tots els sistemes semblants), a la qual hom atribuirà, encara que certament de molt mala gana, el mateix nombre. Ara bé, ¿pensa algú que el número quatre és un sistema d'infinits elements o, més aviat, preferirà oblidar-ho de seguida? (En canvi, tothom tindrà sempre present que el número 4 és el fill del número 3 i la mare del número 5).[1]

Ja hem explicat abans, en efecte, que Dedekind considera que la propietat essencial dels nombres naturals és la "d'estar en un cert ordre determinat" -l'ordre habitual induït per l'aplicació successor- i que aquest ordre és pressuposat en el mateix procés de contar, car quan volem determinar el nombre d'elements d'un conjunt finit arrangem aquests elements en un ordre: primer, segon, tercer, … prèviament donat. Així doncs, la propietat dels nombres naturals d'estar ordenats en una sèrie és la propietat essencial dels nombres naturals, mentre que el fet que aquests nombres serveixin per contar els elements d'un conjunt no és més que una "aplicació" seva. D'aquí que Dedekind consideri el concepte de nombre ordinal anterior i més fonamental que el de nombre cardinal i identifiqui els nombres naturals amb els ordinals. Per contra, tal com veurem més endavant, Frege identificarà els nombres naturals amb els cardinals, donat que per aquest autor la propietat essencial dels nombres naturals és la de permetre contar els elements d'un conjunt i és, en definitiva, aquesta propietat la que ha de reflectir la seva definició. En aquest sentit, Dummett ha observat encertadament en la seva obra *Frege: Philosophy of Mathematics* (*1991*) que:

> L'aproximació de Dedekind a la pregunta posada en el títol de la seva obra difereix completament de la de Frege. Dedekind l'aborda més específicament en l'esperit d'un matemàtic, Frege més en el d'un filòsof; l'enfocament de Dedekind era el d'un matemàtic pur, mentre que Frege es va preocupar per les aplicacions. L'interès central de Dedekind era caracteritzar l'estructura abstracta del sistema dels nombres naturals; allò per a què els nombres fossin emprats era per a ell una qüestió secundària.[2]

---

[1] *Dedekind 1932*, 490.
[2] *Dummett 1991*, 48.

9. Dedekind i l'axiomatització de l'aritmètica

Emmy Noether ha assenyalat, en una nota editorial que acompanya la publicació de *Was sind* en el tercer volum de *Gesamelte mathematische Werke* (*Dedekind 1932*), que aquesta obra "ha estat precursora en dues direccions, la recerca sobre els fonaments i la teoria axiomàtica de conjunts".[1] Així, segons Noether, *Was sind* hauria encetat dues línies de recerca: una que hauria dut al programa fundacionalista de Hilbert i una altra que hauria dut a la teoria de conjunts de Zermelo. Però, tal com veurem més endavant, la teoria de conjunts de Zermelo s'emmarca plenament en el programa d'axiomatització de les matemàtiques emprès per Hilbert com a resposta als problemes de fonamentació provocats per l'aparició de les paradoxes conjuntistes. Més encara, veurem també que la fonamentació axiomàtica de les diferents branques -aritmètica, geometria, … - és un procediment bastant comú a finals del segle XIX, en l'aplicació del qual destacaren els lògics i matemàtics italians com Peano, Padoa, Pieri, etc. De fet, si en algun lloc és manifesta la influència de Dedekind és en l'axiomatització de l'aritmètica duta a terme per Peano en diverses obres, de manera que encara avui en dia és habitual parlar dels axiomes de Peano-Dedekind per a l'aritmètica. El mètode axiomàtic de Hilbert i el desenvolupament en el seu marc de la teoria de conjunts de Zermelo, seran estudiat en un capítol posterior, donada la importància que tenen les seves contribucions per al desenvolupament de la lògica i la teoria de conjunts contemporànies. Serà en aquest context que ens farem ressò de la influència de *Was sind* en la gènesi i formulació de la teoria de conjunts de Zermelo. En aquesta secció estudiarem la influència de Dedekind en l'axiomatització de l'aritmètica per part de Peano, mentre que en la secció següent farem una breu discussió sobre el pretès logicisme de Dedekind, per tal de situar les recerques d'aquest autor en la correcta perspectiva filosòfica.

Peano exposa per primera vegada la seva resposta a les "qüestions relatives als fonaments de l'aritmètica"[2] en un llibret titulat *Aritmetices principia, nova methodo exposita* [*Els principis de l'aritmètica, exposats amb un nou mètode*] (*1899*). Aquest llibre és posterior, doncs, a la primera edició de *Was sind* i, tal com reconeix Peano en el seu prefaci, l'obra de Dedekind li fou d'allò més útil per a la redacció del seu propi llibre.[3] En aquest llibret de Peano trobem, en efecte, el seu primer intent d'axiomatització de l'aritmètica en

---

[1] *Dedekind 1932*, 390.
[2] *Peano 1958*, 21.
[3] *Cf. Ibid.*, 22.

llenguatge simbòlic. Els signes emprats per Peano pertanyen o bé a la lògica o bé a l'aritmètica, i entre aquests últims distingeix entre "aquells que poden expressar-se amb altres signes aritmètics juntament amb els signes de la lògica i representen les idees que podem definir" i aquells que no poden, això és, els signes *definits* i els *primitius*. Peano distingeix també entre els *teoremes*, "proposicions que es dedueixen a partir de les altres mitjançant les operacions lògiques", i els *axiomes*, que "expressen les propietats fonamentals dels signes als quals els manca definició".[1] El primer paràgraf comença amb la següent explicació dels signes primitius "N", "1", "$a+1$" i "$=$":

> El signe N significa *nombre* (sencer positiu).
> El signe 1 significa *unitat*
> El signe $a+1$ significa *successor de a*, o *a més* 1.
> El signe $=$ significa *igual*.[2]

A continuació s'exposen nou axiomes relatius a aquests signes primitius. Deixant de banda els axiomes 2, 3, 4 i 5 que fan referència al signe d'igualtat, el qual pertany en realitat a la lògica, els axiomes de Peano per a l'aritmètica són els següents (reordenats):

> P1. $1 \,\varepsilon\, N$ (1 és un nombre)
> P2. $a \,\varepsilon\, N \cdot\!\supset \cdot\, a+1 \,\varepsilon\, N$ (el successor de tot nombre és un nombre)
> P3. $a, b \,\varepsilon\, N \cdot\!\supset : a = b \cdot = \cdot\, a+1 = b+1$ (Dos nombres són iguals si, i només si, els seus successors són iguals)
> P4. $a \,\varepsilon\, N \cdot\!\supset \cdot\, a+1 -\!= 1$ (1 no és el successor de cap nombre)
> P5. $k \,\varepsilon\, K \therefore 1 \,\varepsilon\, K \therefore x \,\varepsilon\, N \cdot x \,\varepsilon\, K : \supset_x \cdot x+1 \,\varepsilon\, K :: \supset \cdot N \supset K$ (Si k és una classe qualsevol, $1 \,\varepsilon\, K$ i per tot nombre n, si $n \,\varepsilon\, K$, llavors $n+1 \,\varepsilon\, K$, aleshores k conté la classe de tots els nombres).[3]

Tal com assenyala Peano en un article de 1891, "les proposicions primitives anteriors són degudes a Dedekind".[4] Totes elles, en efecte, poden deduir-se fàcilment de la definició de *Was sind* de sistema simplement infinit (71) (*Cf. supra*, § 6). En particular, P1 es posa en el

[1] *Ibid.*, 21.
[2] *Ibid.*, 34.
[3] Aquests són, en realitat, els axiomes 1 i 6-9 enunciats per Peano. Els axiomes 2-5 són axiomes relatius a la relació d'igualtat (*Cf. ibid.*, 34). Les explicacions informals de cada axioma han estat afegides per nosaltres.
[4] *Ibid.*, 86.

preàmbul d'aquesta definició, P2 és una reformulació de la condició α d'aquella definició, P3 de la condició δ, P4 de la condició γ. Finalment, P5 és una reformulació en termes de classes del teorema d'inducció completa per als nombres naturals (80), demostrat per Dedekind amb l'ajut de la condició β de la definició 71. En aquest sentit, Russell ha assenyalat encertadament que la condició $N = 1_0\,(\beta)$ de la definició de Dedekind és una tesi pràcticament equivalent al principi d'inducció, és a dir, a la condició (P5) de Peano, i que "l'elecció relativa a quina ha de ser un axioma i quina ha de ser un teorema és essencialment una qüestió de gust".[1] D'una altra banda, Peano també defineix els nombres naturals a través d'un procés d'abstracció, tal com havia fet Dedekind. Segons ell, en efecte:

> Hi ha una infinitat de sistemes que satisfan totes les proposicions primitives [...] Tots els sistemes que verifiquen les proposicions primitives estan en una correspondència biunívoca amb els nombres. El nombres són allò que hom obté a a partir de tots aquests sistemes per abstracció; en altres paraules, [els nombres] constitueixen el sistema que té totes les propietats enunciades en les proposicions primitives i només aquestes.[2]

Veiem així que la caracterització de Peano dels nombres naturals és essencialment idèntica a la de Dedekind, car tant en un cas com a l'altre la definició per abstracció de la sèrie numèrica pressuposa la noció d'isomorfia. Tant Dedekind com Peano consideraven, en efecte, que les condicions exposades per cada un d'ells en les seves respectives definicions, caracteritzaven adequadament la sèrie dels nombres naturals perquè, com diríem avui en dia, tots els models d'aquests axiomes són isomorfs, és a dir, hom pot establir entre els seus elements una correspondència biunívoca que deixa invariant les propietats estructurals definides pels axiomes. Amb tot, entre Dedekind i Peano hi ha una diferència notable, car mentre el primer creu que totes les nocions aritmètiques es poden definir a partir de nocions lògiques (conjuntistes), el segon considera que hi ha certes nocions aritmètiques que són primitives o indefinibles i que només poden ser definides implícitament a través dels axiomes. Com veurem més endavant, el punt de vista dominant en les recerques de Hilbert sobre els fonaments de l'aritmètica i el mètode axiomàtic oscil·larà entre les dues tesis anteriors. Així, si bé Hilbert intentarà inicialment un desenvolupament conjunt de la lògica i aritmètica per tal d'abordar el problema de la consistència de l'anàlisi (*Cf. infra*, cap. VIII, §

[1] *Russell 1903*, 241.
[2] *Peano 1899*, 30.

4), abandonarà ben aviat aquest punt de vista i optarà per definir les nocions aritmètiques i conjuntistes en termes de las nocions de la lògica pura (*Cf. infra*, cap. VIII, §§ 6 i 9), però finalment abandonarà aquest últim punt de vista i tornarà a una posició semblant a la inicial, però amb el bagatge teòric i metodològic de la seva *Beweistheorie*, que li permetrà abordar des d'una nova perspectiva el problema de la consistència de l'anàlisi (*Cf. infra*, cap. VIII, § 9).

10. Dedekind: el logicisme i la teoria de conjunts

Tal com hem vist abans, Dedekind reivindica una concepció logicista de les matemàtiques, que descansa en darrer terme en la possibilitat d'una construcció purament lògica del concepte de nombre, sense apel·lar a les intuïcions d'espai i temps. No hi ha cap mena de dubte que Dedekind considerava la teoria de conjunts com a part de la lògica, car el seu programa logicista consisteix essencialment a desenvolupar l'àlgebra i l'anàlisi a partir dels conceptes de la seva *Systemlehre*. Amb tot, tal com hem pogut veure al llarg de la nostra exposició, la construcció lògica del concepte de nombre duta a terme per Dedekind a *Was sind* descansa no en la lògica pròpiament dita, sinó en la teoria de conjunts. Tal com criticarà Frege, en aquesta obra no trobem cap exposició d'un sistema lògic en el qual s'explicitin els axiomes lògics i les regles d'inferència que s'empraran després. El que hi ha és, més aviat, una mena d'introducció intuïtiva a la teoria de sistemes o conjunts que pressuposa la seva construcció de la sèrie dels nombres naturals. Naturalment, hom podria parlar encara de logicisme, en el sentit modern de la paraula, en l'obra de Dedekind, si aquest autor veiés els conjunts com entitats indissolublement lligades a propietats d'un tipus determinat, això és, com extensions de conceptes (Frege) o de funcions proposicionals (Russell). Ara bé, és evident que Dedekind veia els conjunts com entitats independents de les funcions proposicionals i va concebre clarament la possibilitat de generar nous conjunts a partir dels elements de conjunts prèviament donats. Però si els conjunts es veuen com entitats independents de les funcions proposicionals, ja no té sentit parlar de la teoria de conjunts com una branca de la lògica i veure el programa dedekindià de reducció de les matemàtiques a la teoria de conjunts com un programa logicista. Hem de concloure, doncs, que Dedekind entén per lògica quelcom essencialment diferent del que entenem avui en dia i que el seu logicisme és, si més no des del punt de vista modern, un *pretès logicisme*.

Segons Wang, l'"interès històric" de la primera secció de *Was sind* "rau en el fet que és probablement el primer intent parcial per enunciar explícitament principis intuïtius en la formació de conjunts. Més tard, Zermelo farà ús d'aquesta i altres seccions de l'assaig de Dedekind en la seva construcció d'un sistema axiomàtic".[1] Més endavant ens ocuparem amb detall de la teoria axiomàtica de conjunts de Zermelo i farem referència a alguns aspectes concrets de la influència de la teoria de conjunts de Cantor i Dedekind en la gènesi i el desenvolupament d'aquella (*Cf. infra*, cap. VIII, § 10). Però, independentment d'això, podem preguntar-nos ara, si més no per fer una primera valoració de l'obra de Dedekind, quines són les contribucions de Dedekind a la teoria de conjunts moderna. Per un costat, podem trobar a la *Systemlehre* de *Was sind* una definició extensional del concepte de sistema o conjunt, la definició d'una part o part pròpia d'un conjunt donat, és a dir, la definició de la relació d'inclusió i d'inclusió estricta, la demostració de la transitivitat de la relació d'inclusió i la definició de la igualtat de dos conjunt per la seva inclusió recíproca, la definició de la reunió i intersecció d'un nombre qualsevol de conjunts i diversos teoremes relatius a aquestes operacions. Malauradament, Dedekind és incapaç de distingir adequadament entre un element i el seu singletó, rebutja explícitament la introducció del conjunt buit i confon reiteradament les relacions d'inclusió i pertinença. Amb tot, en un inèdit posterior titulat precisament *Gefahren der Systemlehre*, el mateix Dedekind se n'adonarà d'aquests errors: introduirà la possibilitat de definir intensionalment el conjunts, la qual cosa li permetrà introduir el conjunt buit, i proposarà una notació adequada que permeti distingir entre element i singletó, pertinença i inclusió. Per un altre costat, podem trobar a l'obra de Dedekind les definicions modernes de cadena, conjunt finit i conjunt infinit, les quals juguen un paper clau no només en la teoria de conjunts, sinó també en altres branques de les matemàtiques modernes. En aquest sentit, tal com hem dit abans, el fet que Dedekind defineixi la noció de conjunt finit a partir de la de conjunt infinit i que basteixi a partir d'aquesta última l'aritmètica i l'anàlisi és un signe més de la modernitat de la matemàtica dedekindiana.

[1] *Wang 1957*, 152.

CAPÍTOL V

Frege: lògica i filosofia de les matemàtiques

1. Els primers escrits

Frege va néixer l'any 1848 (m. 1925) a Wismar, on estudià fins el 1869. Aquell any va aprovar l'*Abitur*, la qual cosa el va permetre anar a la universitat. Els quatre primers semestres els va passar a la universitat de Jena, on va estudiar química, matemàtiques i filosofia, i els cinc últims a la universitat de Göttingen, on va estudiar física, matemàtiques i filosofia de la religió. L'any 1873 va assolir el doctorat en aquesta universitat amb una dissertació titulada *Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene* [*Sobre la representació de formes imaginàries en el pla*] (*1873*) i l'any següent va obtenir la *Venia docendi* per la universitat de Jena amb la dissertació *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegrifes grunden* [*Mètodes de càlcul basats en una extensió del concepte de quantitat*] (*1874*). Aquests dos primers treballs són interessants sobretot perquè mostren les principals influències que rebé Frege, discuteixen una sèrie de problemes que expliquen en bona mesura el seu interès posterior en la fonamentació de les matemàtiques i donen ja algunes claus importants per entendre la manera com Frege abordarà aquesta tasca.

La primera dissertació comença amb l'afirmació que "tota la geometria, al cap i a la fi, es basa en axiomes, la validesa dels quals deriva de la nostra facultat intuïtiva"[1] i, consegüentment, Frege procedeix a mostrar, tal com indica el títol, com les *formes imaginàries* del pla (punts, corbes i, especialment, rectes) poden ser representades geomètricament mitjançant "elements reals i intuïtius".[2] D'aquesta manera, assenyala Frege, s'assoliran dos objectius fonamentals: poder estendre a les formes imaginàries resultats ja coneguts referits a les formes reals i substituir les relacions no intuïbles de les formes imaginàries per relacions intuïtives. Per entendre la problemàtica tractada per Frege, cal fer esment de la situació de la geometria en el s. XIX, car es tracta clarament d'una problemàtica

1 *Frege 1967*, 1.
2 *Ibid.*, 3.

relativa a un cas d'*extensió de domini*, probablement el més notori del segle XIX: l'extensió per part dels geòmetres projectius de l'espai euclidià amb una sèrie de punts i rectes nous.[1]

Com és ben sabut, els geòmetres de l'escola projectiva, sota el liderat de Jean-Victor Poncelet (1788-1867), havien estès l'espai euclidià afegint-hi, d'una banda, nous punts situats en una recta a l'infinit -anomenats, per això mateix, *punts a l'infinit*- i, d'una altra, un complement de *punts imaginaris* les coordinades dels quals es representaven mitjançant *nombres complexos*. El motiu fonamental que dugué aquests geòmetres a afegir aquests *elements d'extensió* fou la necessitat d'explicar en termes estrictament geomètrics alguns resultats de la *geometria analítica* i donar així resposta al seu èxit. Considerem, per exemple, el problema considerat per Frege a la dissertació de 1873 de calcular els punts d'intersecció d'un cercle amb una recta. En geometria analítica, aquesta relació geomètrica d'intersecció és reemplaçada per l'operació algèbrica de substitució. Així, per exemple, si el cercle és donat per l'equació $x^2 + (y-1)^2 = 26$ i la recta per l'equació $y = 0$, substituint el valor de y donat per aquesta última equació en la primera, obtenim que $x = \pm 5$, d'on els punts d'intersecció cercats seran $\langle 5, 0\rangle$ i $\langle -5, 0\rangle$. Però si, en comptes de la recta anterior, considerem una recta que *no* talli el cercle com, per exemple, la recta donada per l'equació $y = -5$, llavors el procediment de substitució donarà els punts d'intersecció *imaginaris* $\left\langle -i\sqrt{10}, -5\right\rangle$, $\left\langle i\sqrt{10}, -5\right\rangle$. Tal com assenyala Frege, el que és realment digne de remarcar dels exemples anteriors és que, des d'un punt de vista estrictament geomètric, "una recta es comporta en relació a tots els cercles que determinen junt amb ella els mateixos punts imaginaris, just de la mateixa manera com ho fa en relació a un sistema de cercles que tinguin en comú amb ella els mateixos punts reals".[2] Per exemple, les aplicacions definides entre dos punts x, x' de cada recta per les equacions $xx' = (\pm 5)^2$ i $xx' = 10$ determinen, en ambdós casos, una *involució*, encara que en el cas imaginari aquesta involució no tingui aparentment *punts fixos*. Veiem així que, d'una banda, la geometria analítica tracta unificadament dues situacions que des del punt de vista de la geometria euclidiana tradicional -anomenada sovint *sintètica*- semblen completament diferents i, d'una altra, duu a resultats interpretables geomètricament, encara que alguns resultats intermedis no ho siguin. Per alguns matemàtics, com ara Peacock o Boole, aquesta ininterpretabilitat no constituïa cap problema, car creien que les regles de l'àlgebra simbòlica tenien una mena d'*universalitat* que duia sempre a resultats correctes en qualsevol camp del saber, encara que els resultats intermedis no fossin interpretables -de fet,

---

1 Un altre cas notori és el dels *nombres ideals* de Kummer, que Dedekind generalitza a través dels conjunts anomenats encara avui en dia *ideals*.

2 *Ibid.*, 1.

com ja sabem, aquesta universalitat de l'àlgebra es troba en la base de l'èxit del càlcul lògic de Boole (*Cf. supra*, cap. I, § 4). En canvi, altres matemàtics com ara Poncelet, el pare de la *geometria projectiva*, intentaren donar raó de l'èxit del càlcul algèbric aplicat a la geometria en termes purament geomètrics. Poncelet no creia que l'èxit de la geometria analítica fos degut a una suposada "universalitat de l'àlgebra", sinó més aviat a l'existència d'uns elements *invisibles* o *ocults*, a saber, els *elements d'extensió* abans esmentats. Poncelet argumentava que quan les figures d'un sistema geomètric eren modificades per "un moviment continu, però, d'altra banda, arbitrari [...] les propietats i relacions trobades pel primer sistema romanien aplicables als estats successius del sistema [...] [fins i tot] quan aquells objectes [del primer sistema] deixen de tenir una existència positiva i absoluta, una existència física".[1] Aquest principi era anomenat per Poncelet el *principi* o *llei de continuïtat* i era en virtut d'ell que hom postulava l'existència dels *punts a l'infinit* i dels *punts imaginaris*. En efecte, tal com ha assenyalat H. Freudenthal en l'article "The Impact of von Staudt's Foundations of Geometry" (*1981*), en virtut d'aquest principi:

> Allò que pugui afirmar-se d'una figura que contingui dues línies que es tallin ha de romandre vàlid si les línies esdevenen paral·leles -això és legalitzar l'infinit, que en geometria ha estat certament una eina heurística des de l'antiguitat. Però hi ha més que això, i això s'oblida fàcilment avui dia: el mateix s'ha de poder dir sobre la situació d'una línia recta respecte d'una corba, tant si -en el pla real- es tallen o no, i això és reconèixer drets civils en el domini de la geometria a l'imaginari.[2]

Així, en el nostre exemple hom argumentaria, d'acord amb el principi de continuïtat, que els punts d'intersecció -els punts fixos de la involució- *continuaven* existint en el segon cas -quan les seves coordinades són complexes- i, per tant, segueixen governant les relacions entre el cercle i la recta, encara que hagin esdevingut punts *invisibles* -no intuïbles, que diria Frege-, és a dir, punts *imaginaris*. En qualsevol cas, l'extensió de l'espai euclidià amb una sèrie de punts i rectes nous presenta diversos problemes, essent el primer d'ells com justificar la introducció d'aquests elements d'extensió. Com ja hem vist, segons Poncelet, calia *postular-los* d'acord amb el *principi de continuïtat* per així poder desenvolupar la geometria unificadament i sintètica. Ara bé, aquest principi pateix d'una notable manca de rigor -com ja va notar Cauchy, contemporani de Poncelet-, i converteix la geometria projectiva en una

1 *Fauvel i Gray 1987*, 543 (ordre arranjat).
2 *Plaumann i Strambach 1981*, 402.

mena de reorganització *creativa* de la geometria euclidiana. Això dugué a K. G. C. Von Staudt (1798-1867) a intentar reformular la geometria projectiva i presentar-la de manera més rigorosa. Von Staudt, com Poncelet, volia fonamentar la geometria projectiva independentment de qualsevol consideració mètrica i això el dugué a definir els elements d'extensió a partir de conceptes i relacions ja coneguts de la geometria euclidiana, de manera que l'espai projectiu esdevingués una mera *extensió* per definició de l'espai euclidià. En poques paraules, l'estratègia de von Staudt consistí, en comptes de postular *à la* Poncelet nous elements que expliquessin la continuïtat de certes propietats i relacions geomètriques, a triar aquestes mateixes formes o, millor dit, els *conceptes abstractes* derivats d'elles, com els elements d'extensió. Així, per exemple, en lloc de postular l'existència de nous punts a l'infinit allà on es troben les línies paral·leles, Von Staudt definia els punts a l'infinit com els conceptes abstractes derivables a partir de la propietat " … és paral·lela a L". I, en lloc de postular nous punts que es corresponguin amb els antics punts fixos de la involució en base a la continuïtat d'aquesta, definia els punts imaginaris sobre la recta com la mateixa involució combinada amb una de les seves dues orientacions cícliques, això és, com "involucions amb una direcció" -així, en el nostre exemple, cada punt imaginari s'identificaria amb cada un dels sentits de la "involució sobre *y* definida per $xx' = -10$".

En la segona meitat dels segle XIX, la majoria dels matemàtics, entre ells Frege, adoptaren el punt de vista de Von Staudt pel que fa la introducció dels elements d'extensió, degut al seu major rigor i al seu caràcter no creatiu. Així, per exemple, Frege afirma que "punt a l'infinit és només una altra expressió per allò comú a totes les paral·leles, la qual cosa anomenem també direcció",[1] i que "els punts imaginaris es poden definir també en termes purament geomètrics mitjançant la combinació d'un cercle amb una recta o mitjançant una involució sobre una recta".[2] En general, hom considerava que aquests elements d'extensió o formes imaginàries conformaven, juntament amb els elements regulars o reals, l'estructura oculta darrera dels fets de la geometria euclidiana i, per tant, se'ls considerava tan reals com a aquests últims, encara que fossin de naturalesa abstracta. Això últim implicava naturalment que no eren visibles o intuïbles en si mateixos, encara que si ho eren a través de les propietats i relacions que indueixen en els elements visibles. En qualsevol cas, hom considerava que es podia obtenir una adequada representació geomètrica dels elements d'extensió, transferint-los l'aparença intuïtiva de determinats elements de la geometria euclidiana -així, per exemple, els punts a l'infinit es representaven habitualment mitjançant rectes. Aquests mètodes tenien una

[1] *Frege 1967*, 1.
[2] *Ibid.*, 1-2.

llarga tradició en geometria projectiva i un dels seus màxims exponents fou Laguerre. Doncs bé, és precisament en aquesta tradició que cal emmarcar la tesi doctoral de Frege, en la qual aquest autor intenta estendre els mètodes de Laguerre a les formes imaginàries. La importància d'aquesta representació geomètrica rau, tal com diu Frege, en què d'aquesta manera "les relacions no intuïbles de les formes imaginàries són reemplaçades per [relacions] intuïbles".[1] Això, en efecte, era important al ulls de Frege, donada la seva tesi que la validesa de les veritats geomètriques descansa en la nostra facultat intuïtiva. Ara bé, tal com ha assenyalat M. Wilson en l'article "Frege: The Royal Road from Geometry" (*1992*) s'ha de tenir en compte que "amb això, Frege només vol dir que el cos sencer del nostre coneixement geomètric sorgeix de fets que ens són donats per la intuïció [...] [però] d'aquí no se segueix que tots els *objectes* propis de la geometria hagin d'aparèixer en un ropatge intuïtiu -en particular, els punts complexos invisibles no ho fan".[2]

Com hem dit abans, un altre cas notori d'extensió de domini fou l'extensió del cos dels nombres algèbrics amb els anomenats nombres ideals, tasca en la qual sobressortí R. Dedekind. L'estudi d'aquest cas ens permetrà conèixer, doncs, la pràctica definicional emprada per Dedekind per introduir aquests elements d'extensió, la qual utilitzarà també per introduir els nombres cardinals i reals. Tal com explicarem després, aquesta pràctica definicional presenta una notable analogia amb la de Von Staudt, però l'origen de les definicions dedekindianes cal cercar-lo més aviat en el treball de C. F. Gauss (1777-1885) sobre la teoria de nombres que no pas en la geometria de Von Staudt. Com és ben sabut, en la seva famosa obra *Disquisitiones arithmeticae*, Gauss desenvolupà per primera vegada l'àlgebra o teoria de congruències, "exemple primitiu del treball amb classes d'equivalència" en paraules de Boyer.[3] Amb tot, la primera vegada que l'àlgebra de congruències es veu pròpiament com un àlgebra de classes d'equivalència és en la memòria de 1856 de Dedekind *Abriss einer Theorie der höheren Kongruenzen in bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus*.[4] Tal com reconeix el propi Dedekind en l'article de 1878 "Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen"

---

[1] *Ibid.*, 3.

[2] *Demopoulos 1995*, 129. En l'article citat es poden trobar bona part de les idees exposades en aquesta secció i una explicació, amb l'ajut de les representacions gràfiques corresponents, dels exemples de Frege esmentats en les pàgines anteriors. En qualsevol cas, les referències de Wilson als primers escrits de Frege és pràcticament inexistent i això no deixa veure que bona part de la problemàtica i idees exposades en el seu article foren exposades pel mateix Frege, tal com queda manifest en la nostra exposició.

[3] *Boyer 1992*, 633.

[4] *Dedekind 1930*, 40-66.

[“Sobre la relació entre la teoria dels ideals i la teoria de les congruències”], l’interès en la teoria de congruències fou “estimulat pel gran descobriment de Kummer”,[1] una versió del teorema de descomposició primera per als sencer ciclotòmics.[2] H. M. Edwards ha assenyalat en l’article “Dedekind’s Invention of Ideals” (*1983*) que:

> El concepte fonamental de la teoria de Kummer és el de factor primer ideal de sencer ciclotòmic. Kummer defineix què vol dir que un sencer ciclotòmic es “divisible μ vegades” per un factor primer ideal, però no diu mai que és un factor ideal primer. Més encara, [Kummer] parla ocasionalment de nombres ideals en comptes de factors primers ideals, però no diu mai res del que pugui ser un nombre ideal [...] Aquest estat de coses era extremament insatisfactori per Dedekind.[3]

Dedekind considerava, a més, la teoria de Kummer massa específica i, en concret, “va veure la feblesa d’un punt de vista que emprava propietats específiques dels sencer ciclotòmics [per explicitar regles que permetessin determinar els factors ideals primer d’un sencer ciclotòmic donat] i no podia aplicar-se a altres cossos de nombres”.[4] Això el dugué a intentar fonamentar sobre bases més sòlides la teoria de Kummer sobre la factorització ideal i a intentar generalitzar-la a cossos de nombres algèbrics arbitraris. La teoria de congruències constituí el primer intent seriós en aquest sentit i, encara que aquesta teoria el portà molt a prop del fi desitjat, Dedekind no arribà a publicar mai els resultats de les seves recerques, encaminant llavors aquestes cap a la teoria d’ideals. Car, segons Dedekind:

> [La teoria de congruències] pateix principalment de dos defectes. El primer consisteix en què la recerca del domini dels nombres sencers algèbrics es fonamenta en la consideració d’un nombre determinat i de la seva equació corresponent, la qual s’entén com una congruència, i que les definicions així assolides dels nombres ideals (o, encara més, de la divisibilitat per nombres ideals), degut a aquesta determinada forma de representació que s’ha triat, no permet reconèixer a priori el caràcter de la invariància. El segon defecte d’aquest tipus de fonamentació rau en què, a vegades, es presenten casos excepcionals i característics, els quals exigeixen un tractament

1 *Ibid.*, 202. Dedekind es refereix naturalment a Ernst Eduard Kummer (1810-1893), contemporani seu.

2 Un nombre α és un *sencer ciclotòmic* o un *arrel n-èsima de la unitat* si és un arrel de l’equació $\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + ... + \alpha + 1 = 0$.

3 *Edwards 1983*, 9.

4 *Ibid.*, 9.

especial. Per contra, la meva nova teoria [la teoria d'ideals] es fonamenta solament en conceptes com ara el de cos, de nombre sencer o d'ideal, en la definició dels quals no es permet cap forma de representació concreta dels nombres [...] i no apareix mai una distinció entre diversos casos a les demostracions de les lleis generals de la divisibilitat".[1]

El pas decisiu en la formulació de la teoria dedekindiana d'ideals es produí, tal com ha assenyalat Edwards, en "identificar els nombres ideals (i, en particular, els factors primers ideals) amb el conjunt (sistema) de sencers que divideixen. [Dedekind] va trobar llavors, no sense una dificultat considerable, car és un teorema difícil -que aquests subconjunts estan caracteritzats pel fet d'estar tancats per l'addició i la multiplicació pels elements de l'anell. [Tal com ha reconegut el propi Dedekind], "aquesta constatació em va conduir naturalment a fonamentar tota la teoria de nombres del domini D [*i.e.* de l'anell dels nombres sencers] en aquesta senzilla definició [d'ideal], totalment despullada de tota obscuritat, i en l'admissió dels nombres ideals"".[2] En resum, doncs, en la gènesi de la noció d'ideal hi jugaren un paper determinant el desig de Dedekind de generalitzar la teoria de Kummer i de basar la teoria de nombres en conceptes fonamentals, rebutjant qualsevol forma de representació. En particular, la identificació d'un nombre primer amb el conjunt de sencers que divideix, això és, amb la classe d'equivalència generada per la congruència aritmètica associada a aquest primer, i la constatació que aquest conjunt o *sistema* constitueix (el que d'ençà llavors anomenem) un ideal de l'anell de sencers, permeté a Dedekind trobar la generalització de la teoria de Kummer que cercava i, representar de forma completament general, sense apel·lar a cap forma de representació concreta, els nombres ideals. Això, en definitiva, marcà el pas de la teoria de congruències a la teoria d'ideals.

Vegem ara la caracterització dedekindiana dels *nombres reals* i *cardinals*, amb l'objectiu de fer palesa l'analogia abans esmentada entre aquestes definicions i la definició de *nombre ideal*. Quant als nombres reals, una vegada introduïda a l'inici del capítol 4 de *Stetigkeit und irrationale Zahlen* [*Continuïtat i nombres irracionals*] la definició de tall (*Schnitt*) com una partició (A_1, A_2) del racionals, caracteritzada pel fet que tot nombre $a_1 \in A_1$ és més petit que $a_2 \in A_2$,[3] Dedekind demostra que hi ha una infinitat de *talls* no engendrats per nombres racionals i afirma:

---

1 *Dedekind 1930*, 202-3.

2 *Edwards 1983*, 9. La cita de Dedekind és de *Dedekind 1930*, 271-72, d'on nosaltres l'hem traduït directament.

3 *Cf. Dedekind 1932*, 323.

> Cada vegada que estem en presencia d'un tall (A_1, A_2) no engendrat [*hervorgebracht*] per un nombre racional i creem un nombre irracional nou a, que considerem perfectament definit per aquest tall (A_1, A_2), direm que el nombre a correspon a aquest tall o que engendra aquest tall.[1]

Pel que fa als nombres cardinals, com ja sabem, un cop demostrat, en la secció catorzena de *Was sind*, el teorema (160): "Un sistema Σ és finit o infinit, segons que existeixi un sistema Z_n semblant a ell", Dedekind posa la definició següent (161):

> Si Σ és un sistema finit, hi ha [...] un únic nombre [Zahl] n al qual correspon un sistema Z_n semblant al sistema Σ. Aquest nombre n expressa el nombre [Anzahl] d'elements continguts en Σ [...] Quan els nombres [Zahlen] s'empren per expressar exactament aquesta propietat concreta dels sistemes finits, s'anomenen nombres cardinals [Kardinalzahlen] (*ja citat*: *Cf. supra*, cap. IV, § 8).

El que tenen en comú aquestes definicions amb la de nombre ideal és que en totes elles, a partir d'una determinada propietat de certs objectes, s'infereix l'existència d'un nou objecte, de forma molt similar a com havia fet Von Staudt vint anys abans. La diferència fonamental entre ambdós tipus de definicions és que, en el cas de Von Staudt, els elements d'extensió són representats mitjançant conceptes abstractes, mentre que en el cas de Dedekind, són representats per les seves classes d'equivalència -encara que Dedekind insisteix sovint en què no s'ha d'identificar els elements d'extensió amb aquestes classes d'equivalència (*Cf. supra*, cap. IV, § 8)-, per la qual cosa el punt de vista de Von Staudt és molt més intensional. Així, per exemple, a partir de la propietat habitualment atribuïda als reals de dividir els racionals en dos conjunts -aquells més petits i aquells més grans que ells-, Dedekind defineix els reals precisament com els objectes engendrats per aquests conjunts o *talls* de racionals o, millor dit, per tots els conjunts o talls idèntics, de manera que hom pot dir que cada una d'aquestes classes de talls idèntics representa concretament un real. Anàlogament, a partir de la caracterització habitual dels conjunts finits com aquells conjunts pels quals n'existeix un altra de *semblant* -és a dir, bijectable amb ell-, Dedekind defineix el cardinal d'un conjunt -finit- com l'objecte engendrat per aquesta propietat, això és, per tots els conjunts semblants entre si. Veiem, doncs, que hi ha una profunda analogia, d'un costat, entre aquestes definicions i la definició d'ideal ja estudiada -recordem que Dedekind defineix

[1] *Ibid.*, 325.

els nombres ideals a partir del conjunt o sistema de nombres de l'anell que divideix-, i, d'un altre, entre les definicions dedekindianes i les definicions de Von Staudt, amb les precisions fetes més amunt -recordem, per exemple, que von Staudt, a partir de la propietat habitualment atribuïda als punts a l'infinit de ser els punts allà on es troben dues rectes paral·leles quan són perllongades fins a l'infinit, definia els punts a l'infinit com allò comú -la direcció- a totes les rectes paral·leles entre si.

Des d'un punt de vista modern, tendim a veure les definicions anteriors com exemples de *definicions per abstracció lògica*. Així, per exemple, hom veu els nombres ideals (reals, cardinals, punts a l'infinit) com els objectes abstrets lògicament a partir de la igualtat entre ideals (identitat entre talls, semblança entre conjunts, paral·lelisme entre rectes), que és evidentment una relació d'equivalència i permet, doncs, passar al quocient on cada classe d'equivalència representarà un element d'extensió. Aquesta mena de definicions són el pa nostre de cada dia en les matemàtiques modernes i ningú no se sorprèn de la seva utilització o es pregunta per la seva validesa, però en els anys que van de Von Staudt a Dedekind i Frege la cosa era ben diferent. Com ja hem explicat, Von Staudt fou el primer en emprar aquesta mena de definicions, encara que sense especificar quina mena d'entitats són els conceptes abstractes que abstreu a partir de determinades propietats. El primer que emprà les classes d'equivalència per aquest propòsit sembla que fou Dedekind, però Dedekind es negà sempre a identificar els diferents tipus de nombres amb les classes d'equivalència. Dedekind insisteix sovint en això i rebutja sempre identificar els nombres amb les mateixes classes d'equivalència, preferint escollir un representant d'aquesta classe, el qual considera com una *lliure creació de l'esperit humà*. Així, tal com hem explicat en el capítol anterior, malgrat que demostra a *Was sind* que "tots els elements semblants a un sistema finit posseeixen el mateix nombre d'elements" (teorema 162), escriu en una carta a Weber de 24/01/1888 que prefereix que hom entengui per un nombre cardinal, "no la classe mateixa (el sistema de tots els sistemes finits semblants entre ells), sinó més aviat quelcom de nou (corresponent a aquesta classe) que l'esperit crea" (*ja citat: Cf. supra*, cap. IV, § 8).

En les pàgines precedents hem intentat explicar com l'extensió d'un domini de les matemàtiques amb nous elements generà una sèrie de problemes que centraren l'interès del jove Frege. Aquests problemes són essencialment de dos tipus: (*i*) ¿què ens autoritza a estendre els resultats d'un domini de les matemàtiques a la seva extensió? i (*ii*) ¿quina és la millor manera d'introduir els elements d'extensió? -en el cas concret de la geometria, hi ha encara un tercer problema, que és el que Frege aborda essencialment en el seu primer escrit, a saber: ¿com podem representar intuïtivament aquests elements?-. Frege aborda la primera qüestió, si bé en el marc estricte de la teoria de nombres, en la dissertació de 1874 i, per tant, estudiarem la resposta fregeana a partir d'allí. La resposta fregeana de la dissertació de 1873 a la segona qüestió ja la coneixem, si més no pel que fa a la geometria, car, com ja sabem, Frege adopta en aquest primer escrit la pràctica definicional de von Staudt per introduir els diferents elements d'extensió. Amb tot, el que és realment digne de destacar aquí és la influència de la pràctica definicional de Von Staudt en les definicions fregeanes dels diferents tipus de nombres, això és, l'ús que fa Frege de la pràctica heretada de Von Staudt per a la construcció dels diferents sistemes de nombres. En efecte, tal com veurem més endavant, Frege introdueix els *nombres cardinals* a *Grundlagen der Arithmetik* (*1884*), després d'una discussió crítica de la definició de Von Staudt de *punt a l'infinit* i una definició de nombre cardinal anàloga a aquella -la definició *contextual* de nombre cardinal-, que el durà finalment a la seva famosa definició -anomenada sovint *explícita*- de nombre cardinal, la qual hereta els trets essencials de les definicions *à la* von Staudt i supleix les seves mancances -fonamentalment la seva incapacitat per fornir-nos un sol element, això és, la seva manca d'*unicitat* (*Cf. infra*, § 5). No només això, sinó que, tal com explicarem a partir del segon escrit de Frege, els nombres reals també són introduïts en el segon volum de *Grundgesetze der Arithmetik* (*1903*) a través de la mateixa pràctica definicional emprada pels nombres cardinals a *Grundlagen*. Tot això mostra, en definitiva, la influència de les definicions *à la* Von Staudt en la pràctica definicional de Frege i, en darrer terme, en la gènesi del logicisme fregeà, el qual requereix primer de tot que els diferents tipus de nombres puguin introduir-se *qua* objectes lògics -recordem arran d'això que les definicions de Von Staudt permetien precisament veure la geometria projectiva com una *extensió lògica* de la geometria euclidiana.

Quant a les definicions dedekindianes i, en particular, les definicions de nombre real i cardinal, és molt poc probable una influència de Dedekind en Frege o viceversa per raons fonamentalment cronològiques.[1] En qualsevol cas, paga la pena avançar la similitud entre la pràctica definicional emprada per ambdós autors a l'hora d'introduir els diferents tipus de nombres. Un bon exemple d'això és la definició de nombre cardinal, en la qual hi ha una

[1] Quant als nombres naturals, els llibres bàsics són *Grundlagen der Arithmetik* (1884) de Frege i *Was sind und was sollen die Zahlen*? de Dedekind, publicat quatre anys més tard (1888), però escrit de forma completament independent a l'obra de Frege. De fet, com ja sabem, una primera redacció del llibre fou acabada el 1878 i va circular privadament la dècada següent (*Cf. supra*, cap. IV, § 1). Quants als nombres reals, les obres bàsiques són *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872) de Dedekind i el segon volum de *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege, publicat el 1903. Però, la construcció dels reals de Frege no té res a veure amb la de Dedekind o Cantor.

notable similitud no només a nivell formal, sinó també de contingut. Ja hem vist abans que Dedekind definia els nombres cardinals [*Kardinalzahlen*] com "quelcom nou" corresponent a la classe de tots els conjunts semblants entre si que "l'esperit humà crea". Frege, per la seva banda, definirà el nombre cardinal [*Anzahl*] que correspon a un concepte F com l'extensió del concepte (de segon ordre) "equinumèric amb el concepte F". El paral·lelisme entre ambdues definicions és evident si hom té en compte que Frege defineix l'equinumericitat a partir del que Dedekind anomena la semblança entre dos conjunts, això és, l'existència d'una correspondència biunívoca entre ells. La diferència rau òbviament en què el punt de partida de Dedekind són els conjunts i el de Frege són els conceptes -obtenint-se els conjunts com extensions seves. La mateixa analogia que hem traçat entre les definicions de nombre cardinal de Dedekind i Frege, pot dibuixar-se també entre la definició d'aquest últim i la de Cantor. En els seus "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" ["Contribucions a la fonamentació dels conjunts transfinits"] (*1895-1897*), Cantor dóna la següent "definició" de nombre cardinal:

> Anomenem "potència" [*Machtigkeit*] o "nombre cardinal" [*Kardinalzahl*] de [un conjunt] M al concepte general que, amb l'ajut de la nostra facultat activa de pensar, resulta del conjunt M quan fem abstracció de la natura dels seus elements diferents i de l'ordre en el quals ens són donats.[1]

Evidentment difícilment podem anomenar a això una definició, però Cantor afegeix tot seguit que dos conjunt són equivalents si existeix una correspondència biunívoca entre ells i que aquesta relació és una relació d'equivalència, afegint que "l'equivalència de dos conjunts és també la condició necessària i suficient per a la igualtat de llurs nombres cardinals",[2] de manera que sembla clar que Cantor identificava el cardinal d'un conjunt M amb la classe generada per la relació d'equivalència " … equivalent a M" o amb un representant seu. Un cop fetes aquestes precisions, és obvi que la definició de Cantor és completament anàloga a la de Dedekind o Frege. Hem vist, doncs, que tant Dedekind com Cantor consideraven que la condició necessària i suficient per a la igualtat de dos nombres cardinals era l'existència d'una relació d'equivalència, però que a l'hora de la veritat definien els nombres cardinals com "lliures creacions de l'esperit humà" (Dedekind) o com a resultat de l'abstracció (Cantor). Això és precisament el que criticarà Frege, acusant Cantor de

1 *Cantor 1966*, 282.
2 *Ibid.*, 283.

recórrer a la psicologia i de ser poc formal i a Dedekind de manca de rigor. En efecte, en una recensió d'una sèrie d'articles de Cantor, Frege critica les definicions cantorianes de nombre cardinal i ordinal com segueix:

> Pel que fa als nombres ordinals i als tipus d'ordre, no puc acceptar com a suficient la fonamentació que Cantor dóna, no pas més que la de nombre cardinal. Ell indica que hom ha de procedir per abstracció per obtenir-los. Però, una indicació d'aquesta mena no pot valer com a definició [...] A més, la paraula "abstreure" és una expressió psicològica i, com a tal, ha d'evitar-se en matemàtiques.[1]

Com hem vist abans, en efecte, Cantor definia el cardinal d'un conjunt M com el resultat d'un doble acte d'abstracció i, per tant, com a resultat d'un procés psicològic. I, encara que les precisions posteriors fetes per Cantor permeten identificar els nombres cardinals amb les classes d'equivalència, el cert és que Cantor no utilitza pas aquestes consideracions per definir els nombres cardinals. Pel que fa a Dedekind, Frege criticarà a *Grundgesetze* les seves definicions *creatives*. Així, per exemple, en relació a la definició dedekindiana de nombre real, Frege assenyala allí que:

> Aquí es planteja la qüestió de si la creació és en absolut possible; i si és possible, si ho és irrestrictament, o si quan estem creant s'han d'observar determinades lleis. En aquest últim cas, primer s'hauria de provar que la creació estava justificada d'acord amb aquelles lleis, abans que hom efectués l'acte de creació. Aquestes recerques manquen completament aquí i, per tant, manca el principal: determinar de què depèn la validesa de les proves en què intervenen nombres irracionals.[2]

Ara bé, aquesta crítica és extensible *mutatis mutandi* a la definició dedekindiana de nombre cardinal car, com ja sabem, aquesta definició segueix exactament el mateix patró que la de nombre real. Com veurem més endavant, a diferència de Dedekind i Cantor, Frege definirà els diferents tipus de nombres a través del procés que avui en dia anomenen *abstracció lògica*, és a dir, com a classes d'equivalència. Frege emprarà aquesta mena de definicions per primera vegada a *Grundlagen* per introduir els nombres cardinals, una vegada rebutjada la possibilitat de definir-los *à la* Von Staudt. Més encara, l'argument central

1 *Frege 1967*, 165.
2 *Frege 1962 2*, 141.

d'aquesta obra s'ha d'entendre com un intent d'aclarir i justificar el procés lògic que subjau a aquesta mena de definicions, la qual cosa el permetrà introduir definitivament els nombres com a objectes lògics. Aquestes recerques manquen completament en les obres de Dedekind i Cantor, la qual cosa explica en bona mesura que aquests autors introdueixin els nombres apel·lant a processos psicològics totalment aliens a la lògica i les matemàtiques. Destaquem finalment que la importància concedida per Frege a aquests mena de definicions en el seu intent de fonamentar lògicament les matemàtiques, el durà a codificar el procés lògic que subjau a les definicions per abstracció lògica a través d'un axioma, l'axioma V de *Grundgesetze*, el qual acabarà malauradament revelant-se inconsistent.

Com ja hem vist al començament de la nostra exposició, el primer escrit de Frege abordava el problema de com representar intuïtivament -això és, en el pla real- les formes imaginàries. Aquestes formes imaginàries es poden representar evidentment en el pla complex tan bon punt assignem als punts imaginaris nombres complexos. Ara bé, tal com afirma Frege, tot just començar la seva *Habilitationschrift* de 1874:

> En considerar els nombres complexos i la seva representació geomètrica, hom deixa el camp del concepte originari de quantitat, tal com és comprès específicament en les quantitats -línies, superficies i volums- de la geometria euclidiana.[1]

Per exemple, assenyala Frege, d'acord amb la vella concepció, hom interpreta la longitud d'una recta com la quantitat d'espai continu que ocupa aquesta recta, des del seu punt d'origen al seu punt final i, conseqüentment, quan afegim longituds ens veiem forçats a ajuntar-les -car altrament, la suma de dues longituds no seria una longitud. Però la cosa canvia completament quan afegim vectors, car llavors "importa tan sols el punt d'origen i el punt final; si hi ha una línia continua entre ells, i si és així quina, sembla del tot indiferent; la idea d'omplir espai s'ha perdut completament".[2] Veiem així com el concepte de quantitat "s'ha alliberat gradualment de la intuïció i s'ha fet independent".[3] El rerafons de l'argument fregeà sembla ser el següent: des del punt de vista abstraccionista que, com ja hem vist, era bastant comú a l'època de Frege i fou criticat repetidament per ell a *Grundlagen* i *Grundgesetze*, els nombres es consideraven abstrets a partir de certes quantitats i, fins i tot, s'identificaven amb elles. Per exemple, els nombres reals es consideraven abstrets a partir de

---

1 *Frege 1967*, 50.
2 *Ibid.*, 50.
3 *Ibid.*, 50.

la noció de longitud o distància d'una recta i els nombres complexos a partir de la noció de magnitud vectorial en el pla de Gauss. En ambdós casos, doncs, es considerava que l'única propietat que romania després del procés d'abstracció era una certa idea de magnitud o quantitat, la qual era representada pels diferents tipus de nombres. El problema era que, com explica Frege, difícilment podem aplicar el mateix concepte de quantitat en tots dos casos i, pitjor encara, que, tal com hem explicat abans, el càlcul amb nombres complexos duia a resultats interpretables geomètricament, però en una geometria que no feia ús de cap tipus de quantitat o magnitud -si més no real. Això explica la incomoditat de Frege i altres figures de l'època, com ara Dedekind, amb el punt de vista abstraccionista i els esforços d'aquests autors per definir els diferents tipus de nombres sense apel·lar a aquest punt de vista.[1] De fet, en la dissertació de 1874, Frege realitza un primer intent per redefinir el concepte de quantitat, avançant alguns dels trets bàsics de la seva caracterització dels reals a *Grundgesetze* com a relacions entre quantitats. Quant a això, cal tenir en compte, en primer lloc, que Frege concep a 1874 els nombres i, en particular els nombres naturals, com un tipus més de quantitats, junt amb altres quantitats com les distàncies o els angles, la qual cosa implica que Frege no preveu en absolut el tractament diferenciat els nombres naturals i els nombres reals, característic de *Grundgesetze*. Això explica també que en aquesta obra Frege vegi la noció de quantitat, i no el concepte de nombre, com l'objecte d'estudi pròpiament dit de l'aritmètica. Ara bé si, com hem dit abans, el concepte de quantitat no ens és donat a la intuïció, afirma Frege, hem de reconèixer que:

> Hi ha una diferència notable entre la geometria i l'aritmètica en la manera com fonamenten les seves proposicions bàsiques. Els elements de totes les construccions geomètriques són intuïcions i la geometria remet a la intuïció com a origen dels seus axiomes. En canvi, com que l'objecte de l'aritmètica no té un caràcter intuïtiu, tampoc les seves proposicions bàsiques poden procedir de la intuïció.[2]

Això suggereix que per a la fonamentació de l'aritmètica cal realitzar dues tasques: (*i*) formular una definició de quantitat "que permeti una aplicació tan amplia com sigui possible,

[1] Hi ha evidentment altres raons que mostren la feblesa del punt de vista abstraccionista com, per exemple, el seu psicologisme -que Frege ataca sovint a *Grundlagen* i *Grundgesetze*-, el seu caràcter vague i la manca de rigor. Quant a això últim, sembla clar que la recerca de noves definicions per als diferents tipus de nombres per part de Dedekind i Frege entra de ple en la tasca de "rigorització de l'anàlisi", engegada vigorosament per aquests i altres autors en la segona meitat del segle XIX.

[2] *Ibid.*, 50.

per a que el domini que estigui sotmès a l'aritmètica sigui el més gran possible"[1] i (*ii*) esbrinar "a què es refereixen aquelles proposicions fonamentals a partir de les quals l'aritmètica sencera germina com a partir d'una llavor".[2] La resposta fregeana a aquesta última qüestió consisteix a referir el contingut de les proposicions bàsiques de l'aritmètica a les operacions (sumar, restar, ...) que realitzem habitualment amb les diferents quantitats o, més en concret, a "l'addició, car el altres mètodes de càlcul sorgeixen d'aquest".[3] En termes generals, continua Frege:

> El procés d'addició és com segueix: reemplacem un grup de coses per una sola de la mateixa mena. Això ens dóna una definició del concepte d'igualtat quantitativa. [Ara bé], si podem determinar en cada cas quan els objectes coincideixen en una propietat, tenim evidentment el concepte correcte de la propietat. Així, en indicar sota quines condicions hi ha una igualtat quantitativa, definim, doncs, el concepte de quantitat".[4]

D'aquesta manera, la resposta a la segona pregunta formulada més amunt permetrà respondre alhora la primera pregunta. Evidentment, hom pot qüestionar que de l'explicació anterior de l'addició se'n segueixi realment una definició de la igualtat de dues quantitats, però el que és veritablement digne de remarcar del text anterior és el punt de vista fregeà segons el qual per definir el concepte de quantitat és suficient determinar les condicions en què dues quantitats són iguals. Aquesta és, en efecte, la primera versió del *principi del context*, que, com veurem més endavant, juga un paper fonamental en la filosofia de la matemàtica fregeana (*Cf. infra*, § 5). Així doncs, definida suposadament la igualtat quantitativa d'acord amb l'explicació de l'addició abans explicitada, Frege defineix una quantitat com "una propietat en la qual un grup de coses, independentment de la seva constitució interna, pot coincidir amb una cosa sola de la mateixa mena".[5] Evidentment, continua Frege, "aquesta definició del concepte [de quantitat] tindrà un contingut real només si la propietat en què estem pensant té un abast tal que també sigui possible que les coses no coincideixen en ella. La multiplicitat compresa dins d'aquest abast l'anomenarem domini

---

1 *Ibid.*, 51.
2 *Ibid.*, 51.
3 *Ibid.*, 51.
4 *Ibid.*, 51.
5 *Ibid.*, 51.

quantitatiu".[1] Frege atura aquí les seves divagacions, adduint que "ens duria massa lluny explicar amb detall com el contingut de l'aritmètica està comprès en les propietats de la quantitat que hem establert" i anuncia que "l'única conclusió que esbossarem aquí és que la quantitat també pot ser atribuïda a les operacions".[2] Amb tot, la seva exposició avança ja alguns trets bàsics de la seva caracterització dels nombres reals a *Grundgesetze*. En efecte, segons Frege, "si hom repeteix una operació f, en la mesura que hom sotmet sempre el nou resultat obtingut a aquesta mateixa operació, hom pot veure la repetida aplicació de l'operació f com una nova operació. Així queda clar que dues o més operacions ff, fff, ..., trobades d'aquesta manera, actuant una rera l'altra sobre un subjecte, sempre poden ser substituïdes per una operació simple, la qual consistirà així mateix en una repetició de f".[3] D'aquí se segueix immediatament, d'acord amb la caracterització que s'ha donat abans de quantitat, que aquest concepte pot ser aplicat a aquesta mena d'operacions o funcions i que un rang d'operacions d'aquest tipus constitueix un domini quantitatiu. Per exemple, si f representa l'operació *successor*, definida en els naturals de la forma habitual, *i.e.* $f(x) = x + 1$, aleshores el conjunt d'operacions ff, fff, ..., obtingudes per l'aplicació iterada d'aquesta operació, constitueix un domini quantitatiu -l'interès d'això rau evidentment en què d'aquesta manera podem obtenir les operacions aritmètiques habituals, per exemple, sumar 2 ho podem representar per $ff(x)$, multiplicar per 2 per $g(x) = x + x$, multiplicar per 4 per $gg(x)$, etc. Evidentment, la caracterització anterior de domini quantitatiu ens mostra "la intima connexió" que hi ha segons Frege, "entre el concepte d'addició i el de quantitat",[4] la qual cosa justifica alhora la tesi abans esmentada segons la qual l'addició constitueix la font d'on brollen les veritats de l'aritmètica. De fet, d'acord amb el que hem dit abans, un domini quantitatiu es caracteritza per ser un conjunt d'operacions amb una operació bàsica a la qual podríem adscriure-li l'element unitat, això és, la quantitat 1, i una operació entre elles de composició a la qual podríem adscriure-li l'addició aritmètica. Això és important perquè Frege veurà a *Grundgesetze* els nombres reals com "avaluadors" del lloc o posició que ocupen determinades relacions en famílies més amplies de relacions similars, les quals estan estructurades per les operacions de composició o addició i contenen l'element unitat i, per tant, de forma molt similar a com s'adscriuen en la dissertació de 1874 les quantitats a les operacions en un domini quantitatiu. Així, en lloc de veure un nombre real com abstret a

---

1 *Ibid.*, 51.

2 *Ibid.*, 51.

3 *Ibid.*, 51.

4 *Ibid.*, 51.

partir d'una determinada quantitat de distància, Frege el veurà com l'objecte derivat a partir del concepte de dues relacions que ocupen el mateix lloc en les seves famílies respectives i, per tant, de forma molt similar a com Von Staudt veia els elements d'extensió. Veiem així que, encara que Frege distingirà més endavant entre nombres cardinals i reals, el procés lògic que subjau a la definició d'aquests objectes és el mateix. En altres paraules, la pràctica definicional heretada de Von Staudt permet a Frege introduir de forma unificada i, tal com veurem més endavant, mes rigorosa i precisa que no li permetia el punt de vista abstraccionista, els diferents tipus de nombres. La percepció d'aquest procés com un procés lògic i la seva codificació a través de l'axioma V de *Grundgesetze* esdevé així la clau de volta del logicisme fregeà. Per això, la constatació per part de Russell que aquest axioma duia a contradiccions, constituí un daltabaix tan profund per la filosofia de la matemàtica fregeana.

La manera d'entendre els diferents tipus de nombres permet conèixer finalment la resposta fregeana a la següent pregunta: ¿què és el que determina que els càlculs algèbrics amb nombres irracionals o complexos donin resultats correctes en un determinat camp d'estudi? La resposta de Frege és que l'anàlisi real o complex funciona només si el cos dels nombres reals o complexos reprodueix isomorfament estructures preexistents en el camp que estem estudiant. Definits de la manera com ho han estat, en efecte, els nombres reals i complexos reproduiran isomorfament els seu domini d'aplicació, que en el cas dels nombres reals seria un domini quantitatiu -això explica clarament l'estudi, previ a la definició dels reals, que Frege duu a terme a *Grundgesetze,* del concepte de quantitat i de domini quantitatiu. La pregunta que aleshores quedaria per respondre seria ¿quina mena d'estructura es requereix per una aplicació dels nombres complexos?, car una vegada resposta aquesta pregunta hom podria definir llavors els complexos seguint el mateix patró que havia seguit per a les definicions dels naturals i els reals. Malauradament, la paradoxa de Russell aturà en sec el programa fregeà de construir els diversos tipus de nombres, lògicament i unificada, a partir de la pràctica definicional heretada de Von Staudt.

2. La lògica de *Begriffschrift*

Encara que en els primers escrits Frege afirma que l'aritmètica no es basa en la intuïció, no diu encara que les proposicions bàsiques de l'aritmètica estiguin basades en la lògica. De fet, sembla clar que aquesta idea se li va ocórrer entre 1874 i 1879 i que en ella hi jugà un paper determinant l'elucidació del concepte de nombre i, en particular, el descobriment que tot enunciat numèric és en realitat un enunciat sobre un concepte, car Frege deriva d'aquesta tesi que els nombres són objectes lògics i no tenen, doncs, un caràcter intuïtiu. A més, aquestes recerques sobre el concepte de nombre el faran veure la necessitat de formular un nou llenguatge, que anomenarà *Begriffschrift* -escriptura conceptual o conceptografia-, car aviat se n'adonarà que el llenguatge quotidià no és adequat per aquestes investigacions, no només per la seva imprecisió i ambigüitat, sinó també perquè en elles cal evitar les expressions del tipus "és evident que", "doncs", etc, de les quals hom se serveix habitualment a l'hora de demostrar les proposicions matemàtiques i que es podrien interpretar com un recurs a la intuïció. El mateix Frege resumeix el seu *iter* intel·lectual en un inèdit titulat "Notes per a Ludwig Darmstaedter" de 1919, publicat pòstumament, en els termes següents:

> Vaig partir de les matemàtiques. En aquesta ciència em va semblar que la tasca més urgent era basar-la en uns fonaments millors. Aviat em vaig adonar que el nombre no era un agregat, un arrenglerament de coses, ni tampoc la propietat d'un agregat, sinó que tot enunciat numèric, que es fa en base a una enumeració, comprèn una asserció sobre un concepte [...] Per aquestes recerques, la imperfecció del llenguatge era un obstacle. Vaig buscar llavors ajuda en la meva conceptografia. Així, de les matemàtiques vaig anar a parar a la lògica.[1]

Així doncs, les recerques de Frege sobre el concepte de nombre són a l'origen de la primera obra important de Frege i, sens dubte, una de les més importants de la història de la lògica: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* [*Conceptografia: un llenguatge de fórmules del pensament pur modelat a partir del de l'aritmètica*] (*1879*). En què consisteix, doncs, aquesta *conceptografia* o escriptura conceptual que dóna títol a la primera obra important de Frege? Es tracta primer de tot, d'un *sistema de notació*, mitjançant el qual es representa el que Frege anomena el contingut conceptual [*begrifflichen Inhalt*] d'una expressió, que és aquella part del seu contingut que és rellevant pel procés de deducció.[2] Per això mateix, Frege diu que la conceptografia és un

[1] *Frege 1969*, 273.

[2] Per exemple, les dues proposicions "els grecs derrotaren els perses a Palatea" i "els perses foren derrotats pels grecs a Palatea" tenen el mateix contingut conceptual i, per tant, la conceptografia fregeana no les diferencia.

llenguatge de fórmules del pensament pur, això és, un llenguatge simbòlic que permet expressar el pensament pur i les seves lleis, les quals emanen de la pròpia determinació del pensament i, per tant, són completament generals. Precisament gràcies a això, la conceptografia forneix l'únic mitjà de fonamentar sòlidament les veritats científiques, "un mitjà que, prescindint de les característiques particulars dels objectes, depèn només de les lleis en què tot el coneixement descansa".[1] Finalment, tal com diu el subtítol de l'obra, aquest llenguatge del pensament pur ha estat construït *prenent com a model el llenguatge de l'aritmètica*, si bé aquesta analogia amb l'aritmètica, adverteix Frege, "es refereix més a idees fonamentals que no pas a realitzacions concretes".[2] Entre aquestes idees fonamentals hi ha, tal com reconeix el mateix Frege, la substitució de la distinció clàssica entre subjecte i predicat per la distinció entre argument i funció.[3] En aquest sentit, cal tenir en compte també que l'interès de Frege se centrà de bon començament en la fonamentació *lògica* de l'aritmètica i, per això, Frege afirma sovint que aquesta es troba a l'orígen de la seva conceptografia, la qual esdevé llavors essencialment un útil per a la primera:

> L'aritmètica [...] ha estat el punt de partida de la sèrie d'idees que m'han dut a la meva conceptografia. Per això penso també aplicar-la primer de tot a aquesta ciència, en intentar analitzar més endavant els seus conceptes i donar a les seves proposicions unes bases més sòlides.[4]

Amb tot, no s'ha d'oblidar també que el mateix Frege confiava a aplicar amb èxit la seva conceptografia, "onsevulga que s'hagi de donar un valor especial a la conclusivitat de les demostracions, com ara en la fonamentació del càlcul diferencial i integral"[5] i que preveia una fàcil aplicació a la geometria i, a partir d'aquí, a la física.[6]

En el prefaci de *Begriffschrift*, Frege divideix les veritats científiques que requereixen demostració en dos tipus diferents, segons que la seva demostració pugui dur-se a terme exclusivament amb mitjans lògics o, per contra, es basi en l'experiència. I afirma a continuació:

---

1 *Frege 1964*, IX.

2 *Ibid.*, X.

3 *Cf. ibid.*, 3.

4 *Ibid.*, XIV.

5 *Ibid.*, XII.

6 *Ibid.*, XII. Tot just després de *Begriffschrift*, Frege publicà un article titulat "Anwendungen der Begriffschrift" ["Aplicacions de la conceptografia"] (*1879$_b$*) en el qual s'empra la conceptografia per exposar algunes relacions i teoremes de la geometria i la teoria de nombres.

> En plantejar-me la qüestió referent a quin d'aquests dos tipus pertanyen els judicis de l'aritmètica, vaig haver d'assajar primer de tot, fins on podria arribar en l'aritmètica només a través de conclusions [*Schlüsse*] basades solament en les lleis del pensament que estan per damunt de tota particularitat. En aquest sentit, el procés consistí a intentar reduir primer el concepte d'ordre en una sèrie [*Anordnung in eine Reihe*] al de successió lògica [*logische Folge*], per avançar des d'aquí al concepte de nombre. A fi que, en aquest procés, no pogués introduir-se quelcom intuïtiu [*etwas Anschauliches*], tot havia de dependre d'una cadena deductiva sense llacunes. Però, en intentar acomplir aquesta exigència el més rigorosament possible, vaig trobar un obstacle en la insuficiència del llenguatge, el qual, a despit de tota la feixuguesa d'expressió que s'esdevingués, com més desenvolupades eren les relacions, menor era l'exactitud que podia assolir. D'aquesta dificultat em va venir la idea de la present conceptografia [*Begriffschrift*]. En primer lloc, doncs, la conceptografia ha de servir per examinar de la manera més segura la conclusivitat d'una cadena deductiva i fer palesa tota pressuposició que es vulgui introduir furtivament, de manera que el seu origen últim pugui ser recercat.[1]

És a dir, per provar que els judicis de l'aritmètica poden ser demostrats amb mitjans exclusivament lògics, cal elaborar un llenguatge lògic -l'escriptura conceptual o conceptografia, que dóna títol a l'obra- que permeti introduir amb tota exactitud els conceptes bàsics de l'aritmètica i demostrar amb el major rigor possible els seus teoremes, tot evitant qualsevol salt en elles que pugui interpretar-se com un recurs a la intuïció, és a dir, a quelcom de naturalesa no estrictament lògica. Conforme a això, en les dues primeres parts de *Begriffschrift*, Frege exposa un sistema lògic, en el qual es formulen explícitament el llenguatge lògic, els axiomes i les regles d'inferència a partir dels quals introduirà a la tercera part alguns conceptes fonamentals de l'aritmètica i demostrarà les seves propietats bàsiques. Aquest sistema lògic abasta tant la lògica proposicional com la de primer ordre amb identitat, encara que Frege admet també que les lletres funcionals puguin considerar-se arguments i, per tant, que es pugui quantificar sobre elles. Això és necessari per algunes de les definicions i teoremes més importants de la tercera part, titulada "Alguns tòpics sobre la teoria general de sèries", per la qual cosa el desenvolupament d'aquesta es duu a terme en el marc de la lògica de segon ordre i requeriria pròpiament, a més dels axiomes i regles del sistema lògic exposat en les dues primeres parts, els axiomes i regles específics de la lògica de segon ordre.

---

1 *Frege 1964*, X.

En la primera part de *Begriffsschrift*, Frege explica i defineix els signes que s'empraran al llarg de l'obra. En el primer paràgraf, Frege explica que en l'anàlisi matemàtica s'empren dos tipus de símbols: les lletres o variables, que s'utilitzen per denotar un nombre o una funció indeterminada i gràcies a les quals és possible la universalitat dels enunciats d'aquesta ciència, i els signes com ara $+, -, \sqrt{}, 0, 1, 2,$ els quals es caracteritzen per tenir un significat concret i fix. Frege afirma tot seguit que assumeix "*la idea fonamental d'una distinció entre aquests dos tipus de símbols*, malauradament poc observada en anàlisi, *per tal de fer-ne ús en un domini més ampli: el del pensament pur en general*. Conseqüentment, tots els símbols que figuren aquí són repartits en dues classes distintes: *aquells sota els quals hom es pot representar coses diferents* i *aquells que tenen un sentit completament determinat*".[1] Aquesta distinció, en el camp de la lògica, podria semblar que és una distinció anàloga a la que fem avui en dia entre símbols lògics (connectives, quantificadors i, si s'escau, símbol d'igualtat) i no lògics (constants individuals, de predicat i de relació), la qual és una distinció bàsica alhora de presentar qualsevol llenguatge lògic i, en particular, els de primer ordre. Però, tal com veurem més endavant, en la lògica de Frege no hi ha lloc per les constants de diferent tipus abans esmentades, sinó només per les variables individuals, de predicat (funcionals, que en diu Frege) i de relació. Segons Frege, en efecte, dels dos tipus de signes abans esmentats, "els primers són les *lletres* i la seva funció consistirà essencialment en expressar la *universalitat*".[2] Aquestes lletres són concretament les minúscules llatines *a*, *b*, *c*, ..., *f*, *g*, … , que apareixen sobretot en la segona part, quan es procedeix al desenvolupament formal de la *Begriffschrift*, i denoten respectivament individus o funcions indeterminades. Amb tot, les lletres que apareixen en la primera part, quan es descriu informalment el càlcul desenvolupat en el segon capítol, són les majúscules llatines i gregues $A, B, C, ..., \Phi, \Psi, ...$, que, segons Frege, s'empraran "com abreujaments, a les quals el lector podria atribuir un sentit apropiat, si jo no les defineixo específicament".[3] En general, tal com veurem tot seguit, les majúscules llatines són emprades per Frege en introduir els signes necessaris per al desenvolupament de la lògica proposicional i denoten el que Frege anomena *continguts judicables*, és a dir, sentències d'un determinat llenguatge objecte. En canvi, quan explica els signes emprats en el desenvolupament de la lògica quantificacional, aquestes mateixes lletres són emprades per denotar els arguments d'una funció, és a dir, noms d'objectes o termes, mentre que les majúscules gregues són emprades per denotar el que

1 *Frege 1964*, § 1, 1.
2 *Ibid*., § 1, 1.
3 *Ibid*., § 2, 2.

Frege anomena funcions, és a dir, propietats i relacions expressables en aquell llenguatge objecte.[1] Així doncs, podríem dir que les minúscules llatines juguen a *Begriffschrift* un rol anàleg al que juguen avui en dia les *variables lliures*, de tipus individual i funcional, del *llenguatge formal*, mentre que les majúscules llatines i gregues funcionen com a *variables metalingüístiques*, és a dir, com a variables del *metallenguatge* a través del qual Frege introduirà els signes lògics, que juntament amb les minúscules llatines, constitueixen els diferents tipus de signes del llenguatge a través dels quals desenvoluparà el càlcul deductiu en la segona part de *Begriffschrift*. La resta de paràgrafs de la primera part està dedicada precisament a explicar els signes *que tenen un sentit completament determinat*, és a dir, els signes lògics pròpiament dits als quals fa un moment fèiem referència.

El segon paràgraf està dedicat al signe del *judici* [*Urtheil*]. Segons Frege, "un judici s'expressa sempre amb l'ajut del signe:

$$\vdash\!\!\!-$$

que se situa a l'esquerra del signe o combinacions de signes que indiquen el contingut del judici. Si hom *omet* el petit traç vertical a l'extrem esquerre del traç horitzontal, el judici es transformarà en una *mera combinació de idees* [*Vorstellungsverbindung*], de la qual el que escriu no expressa si en reconeix la seva veritat o no. Si

$$\vdash\!\!\!-\, A\,,$$

significa [*bedeute*], per exemple, el judici "Els pols magnètics oposats s'atreuen", llavors

$$-\!\!\!-\, A$$

no expressarà aquest judici, sinó que tan sols provocarà en el lector la idea [*Vorstellung*] de l'atracció mútua dels pols magnètics oposats [...] En aquest cas ens *expressem amb perífrasis*, mitjançant les paraules *la circumstància que* o *la proposició que*".[2] D'acord amb l'anterior, el

[1] Frege empra també les lletres majúscules llatines P, Q, R, … habituals avui en dia, per referir-se a propietats i relacions.

[2] *Ibid.*, § 2, 1-2.

traç horitzontal s'anomenarà el *traç de contingut* i el traç vertical es dirà el *traç de judici*. Naturalment, no tot contingut és judicable [*urtheilbar*], és a dir, pot esdevenir un judici, encara que li prefixem el signe $\vdash$ (per exemple, la idea "casa"). Ara bé, donat que el fet de prefixar aquest signe a una combinació de signes implica sempre un reconeixement de la veritat del contingut expressat per aquella, s'imposa que "allò que segueix al traç del contingut ha de tenir sempre un contingut judicable",[1] per la qual cosa s'exclouran de *Begriffschrift* les expressions com ara " $\vdash$ casa". Seguint algunes suggeriments posteriors de Frege podríem anomenar també *pensament* o *proposició* al contingut judicable i *enunciat* a la combinació de signes mitjançant la qual s'expressa aquest pensament.[2] D'altra banda, el contingut d'un judici no s'ha de confondre amb el seu *contingut conceptual*. Segons Frege, dos judicis tenen el mateix contingut conceptual si, en ser combinats amb altres judicis, en podem extreure les mateixes conseqüències. En altres paraules, el contingut conceptual d'un judici és aquella part del seu contingut que és rellevant pel procés de deducció i, per tant, l'únic que cal tenir en compte a *Begriffschrift*, de manera que "no s'ha de fer en ella cap diferència entre els enunciats que tinguin el mateix contingut conceptual".[3]

Per acabar d'entendre el significat del signe $\vdash$ cal fer referència a l'abolició a *Begriffschrift* de la distinció clàssica entre subjecte i predicat. Tal com assenyala Frege: "Podríem imaginar un llenguatge en què la proposició "Arquimedes va morir en la conquesta de Siracusa" s'expressés de la següent manera: "La mort violenta d'Arquimedes en la conquesta de Siracusa és un fet [*Thatsache*]". Aquí, si es vol, també es pot distingir certament entre subjecte i predicat, però el subjecte comprendrà tot el contingut mentre que el predicat té com a únic propòsit presentar aquest com un judici. *Un llenguatge com aquest tindria un únic predicat per a tots els judicis, a saber,* "*és un fet*". Veiem que aquí no es pot parlar de

---

1 *Ibid.*, § 2, 2. Així doncs, les majúscules llatines $A, B, C, \ldots$ significaran o denotaran sempre un *contingut judicable* quan segueixen elles tot soles el traç de contingut.

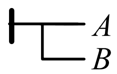
2 Frege dirà més endavant que les paraules *Vorstellungsverbindung* i *beurtheilbarer Inhalt* [contingut judicable] es poden substituir per *Gedanke* [pensament] i que les expressions *la circumstància que* o *la proposició que* es poden traduir també per l'expressió *el pensament que*. (*Cf. Frege 1967*, 337-38, n. 6 i n. 9). A "Über Sinn und Bedeutung" Frege afirmarà que "un enunciat expressa un pensament i significa el seu valor de veritat" (*Ibid.*, 338, n. 8).

3 *Frege 1964*, § 3, 3. Frege observa, per exemple, que "Els grecs derrotaren als perses a Palatea" i "Els perses foren derrotats pels grecs a Palatea" tenen el mateix contingut conceptual, però no el mateix contingut. En suma, allò que pertany al contingut d'un judici i no al seu contingut conceptual serien "tots aquells aspectes del llenguatge que resulten només de l'acció recíproca del que parla i el que escolta; per exemple, quan el que parla pren en consideració les expectatives de l'oient i destaca allò que l'interessa abans d'acabar la frase" (*Ibid.*, § 3, 3). L'ús de la veu activa o passiva és un recurs clàssic en aquest sentit.

subjecte i predicat en el sentit habitual. *La nostra Conceptografia és un llenguatge d'aquesta mena i en ella el signe* $\vdash$ *és el predicat comú per a tots els judicis*".[1] Així, el signe $\vdash$ serà l'equivalent formal del predicat "és un fet" -Frege emprarà també a les explicacions informals altres expressions anàlogues com ara "té lloc", "subsisteix" o "s'esdevé"-, i tindrà com a finalitat convertir una proposició en un judici, la qual cosa suposa, segons s'ha dit abans, afirmar o reconèixer la seva veritat. D'acord amb això, podem interpretar també el signe $\vdash$ a través del predicat "és vertader" -com el mateix Frege farà més endavant- i anomenar-lo el *signe d'asserció* o *signe del judici*. Un cop fetes aquestes precisions i després de remarcar en el paràgraf 4 la irrellevància, pel que fa al contingut conceptual de les proposicions i, en definitiva, als interessos de *Begriffschrift*, de les distincions, d'una banda, entre judicis *categòrics*, *hipotètics* i *disjuntius* i, d'una altra, entre judicis *apodíptics* i *possibles*, Frege defineix en els paràgrafs següents el condicional (§ 5) i la negació (§ 7) i introdueix la regla d'inferència *modus ponens* (§ 6).

El *condicional* es defineix de la manera següent: "Si *A* i *B* signifiquen continguts que poden esdevenir judicis, hi ha llavors les quatre possibilitats següents:

(1) *A* és afirmat i *B* és afirmat;
(2) *A* és afirmat i *B* és negat;
(3) *A* és negat i *B* és afirmat;
(4) *A* és negat i *B* és negat.

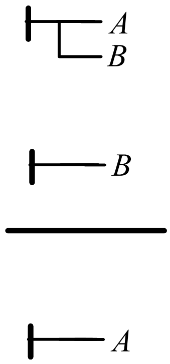


representa llavors el judici que *la tercera d'aquestes possibilitats no té lloc, sinó una de les altres tres*".[2] Evidentment, podríem considerar que els verbs *bejahen* i *verneinen*, als quals corresponen les formes verbals *bejaht* [afirmat] i *verneint* [negat] i que en ser substantivats donen els mots *Bejahung* [Afirmació] i *Verneinung* [Negació], expressen en el text anterior l'adscripció de valors de veritat als continguts dels judicis, amb la qual cosa l'anterior definició seria una mena d'equivalent lingüístic de la taula de veritat del condicional. Però,

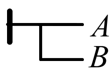
1 *Ibid.*, § 3, 3-4.
2 *Ibid.*, § 5, 5.

tal com veurem més endavant, la definició del condicional i la conjunció com a funcions de veritat pròpiament dites és posterior i requerirà la definició precisa d'alguns conceptes que, a *Begriffschrift,* encara no estan suficientment elaborats (*Cf. infra*, § 6).

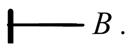
Una vegada definit el condicional, Frege introdueix la regla d'inferència del *modus ponens* que en la Conceptografia fregeana es pot escriure de la manera següent:



i que Frege justifica fàcilment a partir de la *interpretació semàntica* de



i



Aquesta és la única regla d'inferència que Frege enuncia explícitament com a tal, però, com veurem després, en explicar l'ús de les lletres llatines, Frege introdueix implícitament dues regles més, i en les demostracions de la segona part de *Begriffschrift*, s'utilitza també implícitament una *regla de substitució* per a les lletres llatines.

Pel que fa a la *negació*, Frege assenyala que "si s'afegeix un petit traç vertical sota el traç de contingut, amb això s'expressarà la circumstància que *el contingut no té lloc*. Així, per exemple,

$$\vdash\!\!\!\top\; A$$

significa "*A* no té lloc". Anomenaré aquest petit traç vertical el *traç de negació*".[1] És interessant destacar que Frege no introdueix la negació com havia introduït el condicional, és a dir, distingint entre les dues possibilitats:

A és afirmat,
A és negat,

i, afirmant que

$$\vdash\!\!\!\top\; A$$

representa el judici amb el qual s'afirma que té lloc la segona possibilitat. Car, en aquest cas, es podria representar que la primer possibilitat -*A* és afirmat- té lloc per:

$$\vdash\; A$$

I això podria dur fàcilment a interpretar

$$—\; A$$

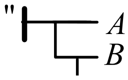
com "*A* és afirmat" i

$$\top\; A$$

[1] *Ibid.*, § 7, 10.

com “*A* és negat”. Ara bé, això és anar molt més enllà del que és la interpretació dels traços de contingut i de negació a *Begriffschrift*, encara que és aquesta precisament la interpretació que s’imposarà -degudament justificada- a partir de “Funktion und Begriff”.

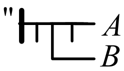
Combinant el condicional i la negació es defineixen la *disjunció* (en sentit inclusiu i exclusiu) i la *conjunció*. Així, segons Frege, per exemple:



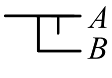
significa “El cas en que *A* és negat i la negació de *B* és afirmada no subsisteix”; en altres paraules, “*A* i *B* no poden ser tots dos negats”. Així només resten les possibilitats següents:

A és afirmat i *B* afirmat;
A és afirmat i *B* negat;
A és negat i *B* afirmat”.[1]

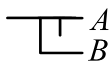
Segons això, l’expressió anterior representa la disjunció en sentit inclusiu. Per la seva banda,



significa

"  és negat "

o “El cas en què *A* i *B* són tots dos afirmats s’esdevé”. Les tres possibilitats que seguien subsistint a

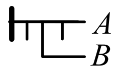


[1] *Ibid.*, § 7, 10-11.

[*és a dir,*

> *A és negat i B és afirmat;*
> *A és negat i B és negat;*
> *A és afirmat i B és negat*.]

són, per contra, excloses. Segons això, hom pot traduir



per "*A* i *B* són tots dos fets"".[1] Així doncs, aquesta expressió representarà la conjunció de *A* i *B*. Finalment, Frege defineix també la incompatibilitat mútua dels judicis -és a dir, "Ni *A* ni *B* és un fet"- i proposa una nova simbologia en la qual la conjunció i la negació es prenen com a signes primitius i a partir d'ells es defineix el condicional. És interessant remarcar que, pel que hem vist fins ara, el *condicional*, *negació*, *disjunció*, *conjunció*, etc, s'introdueixen com a *judicis*, no com a *funcions de veritat*, malgrat els paral·lelismes ja esmentats entre les seves definicions a *Begriffschrift* i les definicions habituals d'aquests signes via taules de veritat. Perquè Frege arribi a definir-los pròpiament com a funcions de veritat haurà d'elaborar, d'una banda, una teoria del significat que aclareixi la relació dels valors de veritat amb els continguts dels judicis -en definitiva, amb les proposicions- i, d'una altra, haurà de definir i ampliar el concepte de funció de manera que pugui incloure les funcions de veritat. Aquests són respectivament els objectius de la conferència "Funktion und Begriff" ["Funció i concepte"] (*1891*) i de l'article "Über Sinn und Bedeutung" ["Sobre sentit i significat"], (*1892*) que estudiarem més endavant (*Cf. infra*, §§ 6 i 7).

Tal com hem vist fins ara, Frege introdueix en els set primers paràgrafs de *Begriffschrift* els signes primitius necessaris per al desenvolupament de la lògica proposicional -els traços de contingut, judici, condicional i negació. En els tres paràgrafs següents, Frege introdueix els signes primitius que cal afegir als anteriors per al desenvolupament de la lògica quantificacional amb identitat, això és, els signes d'*identitat*, de *funció* i de *generalitat*. Pel que fa al signe d'identitat, Frege assenyala que:

---

1 *Ibid.*, § 7, 12.

> La identitat de contingut es distingeix del condicional i la negació pel fet que es refereix als noms, no als continguts. Mentre que normalment els signes només són representants dels seus continguts, de manera que cada combinació en la qual entren només expressa una relació dels seus continguts, recobren sobtadament la seva identitat tan aviat s'uneixen mitjançant el signe d'identitat de contingut, donat que hom indica així el fet que dos noms tenen el mateix contingut.[1]

La necessitat d'un signe que expressi la relació d'identitat de contingut sorgeix del fet que el mateix contingut pot ser determinat de maneres diferents, a cada una de les quals els ha de correspondre un nom diferent. Ara bé, assenyala Frege, "que en un cas particular, es doni el *mateix contingut* mitjançant dos *modes de determinació*, és precisament el contingut d'un *judici* [...] Per a l'expressió d'aquest judici és indispensable doncs, un signe per a la identitat de contingut que uneixi els dos noms [...] Així,

$$\vdash A \equiv B$$

significa: *el signe A i el signe B tenen el mateix contingut conceptual, de manera que es pot posar B en el lloc de A i recíprocament a tot arreu*".[2] El mèrit de la interpretació anterior rau en què permet explicar la diferència reconeguda entre el contingut o valor informatiu de $A \equiv B$ i el de $A \equiv A$. Però, al mateix temps, fa impossible la integració de la teoria de la identitat en el llenguatge objecte i la interpretació coherent de les lleis fonamentals d'aquesta teoria, com ara (en notació moderna):

$$\forall a \forall b (Fa \wedge a = b \rightarrow Fb),$$

en la mesura que suposa que els signes adquireixen una "*desavinença* en la significació" [*Zwiespältigkeit in der Bedeutung*]: quan no se situen a l'esquerra i dreta del signe ≡ signifiquen o representen el seu contingut, però quan figuren a ambdós costats del signe d'identitat, es representen a ells mateixos. Com veurem més endavant, aquests problemes quedaran definitivament resolts amb la introducció de la distinció entre *sentit* i *significat*, que Frege proposa en l'article "Über Sinn und Bedeutung" de 1892 (*Cf. infra*, §7).

---

1 *Ibid.*, § 8, 13-14.

2 *Ibid.*, § 8, 14-15.

En els paràgrafs 9 i 10 de *Begriffschrift*, Frege explica respectivament què és una funció i la seva expressió simbòlica, de la qual depèn la seva notació per a la generalitat, que presenta en el paràgraf 11 i és, sens dubte, una de les grans fites assolides per Frege a *Begriffschift*. Que entén Frege per *funció*? O, millor dit, com entén la distinció abans esmentada entre funció i argument? D'acord amb Frege:

> *Si en una expressió, el contingut de la qual no és necessàriament judicable, un signe simple o compost figura en un o més llocs i el pensem com a substituïble en tots o en alguns d'aquests llocs per un altre signe, però que a tot arreu sigui el mateix, llavors a la part de l'expressió que resta així invariable l'anomenem funció i a la part substituïble el seu argument*.[1]

Així, per exemple, si en la proposició "Cató matà a Cató" considerem la primera ocurrència de "Cató" com a substituïble per un altra signe, llavors la funció serà "matar a Cató"; en canvi, si considerem la segona ocurrència de "Cató" com a substituïble, llavors la funció serà "ser mort per Cató"; finalment, si considerem les dues ocurrències de "Cató" com a substituïbles per un i el mateix signe, llavors la funció serà "matar-se a si mateix". És interessant destacar que, d'acord amb Frege, la distinció entre funció i argument, no té res a veure amb el contingut conceptual d'una expressió, sinó simplement amb la manera de concebre-la [*Auffassung*], és a dir, amb la manera de determinar aquell contingut conceptual. Segons això, podem determinar distintament un mateix contingut conceptual a través de funcions i arguments diferents -com hem pogut comprovar en l'exemple anterior. Consegüentment, funció i argument es defineixen a *Begriffschrift* com a parts d'una expressió, és a dir, com a entitats lingüístiques. Les funcions de dos o més arguments es defineixen a partir de les funcions d'un argument de la següent manera:

> *Si en una funció, un signe considerat fins ara com a no substituïble, es considera ara com a substituïble, en un o tots els llocs on figura, s'obté mitjançant aquesta forma de concepció [Auffassungweise], una funció que té un nou argument, a més dels que ja tenia anteriorment. D'aquesta manera, es formen les funcions de dos o més arguments.*[2]

---

[1] *Ibid.*, § 9, 16.
[2] *Ibid.*, § 9, 17-18.

Tal com hem dit abans, per expressar una *funció indeterminada* [*unbestimmte Function*], Frege empra les lletres Φ, Ψ, ... i per expressar els seus arguments les lletres A, B, ... de manera que, per exemple,

$$\Phi(A)$$

denota una funció indeterminada de l'argument A, i

$$\Psi(A, B)$$

denota una funció indeterminada dels arguments A i B -en el ben entès que A i B poden figurar en la funció més d'una vegada i que, en general, $\Psi(A, B)$ i $\Psi(B, A)$ denoten funcions diferents. Les expressions anteriors esdevenen judicis si els posem al davant el signe del judici. Així, conclou Frege, "hom pot llegir

$$\vdash\!\!\!\!-\!\!\!-\; \Phi(A)$$

com "A té la propietat Φ".

$$\vdash\!\!\!\!-\!\!\!-\; \Psi(A, B)$$

podria traduir-se com "B està en la relació Ψ amb A" o "B és resultat d'una aplicació del procediment Ψ a l'objecte A".[1] Veiem, doncs, que el que Frege anomena aquí funcions amb un o dos arguments es corresponen amb el que anomenarà més endavant *conceptes* o *relacions* i amb el que avui en dia anomenem normalment *predicats* o *relacions* (Russell i Whitehead parlaran generalment de *funcions proposicionals*). La importància de la notació introduïda fins aquí rau en què permet expressar tot contingut conceptual com una funció d'un argument o més arguments i això és alhora el que permet expressar en un judici la seva generalitat. A tal efecte, Frege assenyala el següent:

> En l'expressió d'un judici hom pot considerar sempre la combinació de signes a la dreta de $\vdash\!\!\!\!-\!\!\!-$ com una funció d'un dels signes que hi figuren. Si hom

[1] *Ibid.*, § 10, 18.

posa una lletra gòtica en el lloc d'aquest argument, i si en el traç horitzontal introduïm una concavitat, en la qual hi hagi la mateixa lletra, com a

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- \Phi(\mathfrak{a}),$$

llavors això significa el judici que aquesta funció és un fet, qualsevol que sigui el que hom consideri com el seu argument. Aquí, una lletra emprada com a signe funcional, com ara Φ a $\Phi(A)$, pot ser vista ella mateixa com argument d'una funció de manera que pot posar-se una lletra gòtica en el seu lloc, en el mateix sentit que tot just s'ha establert: El significat d'una lletra gòtica està subjecte tan sols a restriccions òbvies, a saber, que la judicabilitat d'una combinació de signes que segueixen el traç de contingut ha de romandre intacte i, que si la lletra gòtica figura com un signe funcional, aquesta circumstància s'ha de tenir en compte. *Totes* les condicions restants a les quals ha d'estar subjecte allò que pot ser posat en el lloc d'una lletra gòtica s'han d'especificar en el judici.[1]

El text anterior expressa de forma concisa els trets essencials de la concepció fregeana de la quantificació a *Begriffschrift*. En primer lloc, Frege esmenta la possibilitat de considerar els signes funcionals com arguments i substituir-los per una lletra gòtica, la qual cosa equival a admetre la quantificació sobre funcions o quantificació de segon ordre. Segons Frege, "aquesta circumstància s'ha de tenir en compte", per la qual cosa sembla que la substitució d'una funció per una lletra gòtica hauria d'estar subjecte a algunes restriccions, però el cert és que Frege no especifica quines. Podríem suposar, en principi, que Frege es refereix a que en una quantificació de segon ordre no podem substituir una variable individual per la variable funcional lligada per el quantificador. Però aquesta suposició és potser excessiva, perquè, tal com ha assenyalat Van Heijenoort, "en la derivació de la fórmula 77, Frege substitueix F per a en $f(a)$, al menys com a pas intermedi. Si observem llavors que en la derivació de la fórmula 91 substitueix F per f, veiem que està a un pas de la paradoxa. Caurà en l'abisme quan a "Funktion und Begriff", introdueixi el curs de valors d'una funció com quelcom "complet en si mateix" que "pot ser pres com argument"".[2] L'altra restricció a la qual està subjecte la substitució de lletres gòtiques és que "la judicabilitat de la combinació de signes que segueixen el traç de contingut romangui intacte" una vegada efectuada la substitució, la qual cosa equival a limitar els termes A que es poden substituir per x en $\Phi(x)$ a aquells que fan que $\Phi(A)$ sigui una proposició. Tenint en compte, d'altra banda, que el predicat "és un

[1] *Ibid.*, § 11, 19.
[2] *Van Heijenoort 1967*, 3.

fet” és equivalent al predicat “és vertader” i que funció i argument s’han introduït prèviament com a entitats lingüístiques, podem expressar la definició fregeana del quantificador universal de la següent manera:

> $\forall x\Phi(x)$ és vertadera si, i només si, per tot terme A per al qual l’expressió $\Phi(A)$ és una proposició, $\Phi(A)$ és vertadera.
>
> O, equivalentment,
>
> $\forall x\Phi(x)$ és vertadera si, i només si, totes les proposicions obtingudes en substituir x per A en $\Phi(x)$, són vertaderes.

Naturalment, els enunciats quantificacionals de tipus existencial es poden analitzar d’una manera anàloga. Així doncs, Frege interpreta a *Begriffschrift* la quantificació -universal i existencial- *substitucionalment*.[1] Frege assenyala finalment que qualsevol altra restricció que vulguem imposar a la substitució d’una lletra gòtica “s’ha d’especificar en el judici”, és a dir, en el complex funcional que segueix la concavitat. Avui en dia diríem que totes les *restriccions* o condicions referents als valors possibles de les *variables quantificacionals* s’han d’enunciar en la *fórmula oberta* o *predicat* que segueix el quantificador. Ara bé, això equival a rebutjar la utilització de qualsevol mena de *termes de restricció* o d’altres *restriccions contextuals* i, en definitiva, a estendre el *domini de quantifació* a tot l’univers.[2]

---

1 *Stevenson 1973*, 207-211. H. Leblanc, en l’article “Alternatives to Standard First Order Semantics” (*1983*), defineix informalment la interpretació *substitucional* dels quantificadors de la següent manera: “una quantificació universal -existencial- és vertadera si, i només si, cada una (al menys una) de les seves substitucions [substitution instances] és vertadera” (*Gabbay i Guenthner 1983*, 189).

2 Tal com explica W. Hodges en l’article “Elementary Predicate Logic” [*Hodges 1983*], en un enunciat universal com, per exemple,

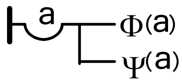
“*Tots els estudiant saben anglès*”,

la classe rellevant d’estudiants a la qual es refereix l’expressió “Tots els estudiants” s’anomena el *domini de quantificació* i el terme “estudiant” s’anomena el *terme de restricció* perquè restringeix el domini de quantificació a la classe denotada per aquest terme. Qualsevol altra restricció en el domini de quantificació s’anomena *restricció contextual*. Així, per exemple, la manera fregeana de donar raó d’un enunciat com l’anterior referit als estudiants catalans, seria a través d’un enunciat del tipus:

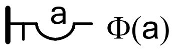
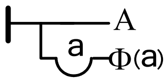
“*Per a tot x, si x és català i estudiant, llavors x sap anglès*”,

és a dir, posant totes les condicions o restriccions en el *predicat -enunciat obert-* i considerant que el domini de quantificació és tot l’univers. (*Cf. Gabbay i Guenthner 1983*, 35-39).

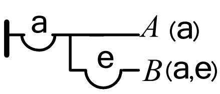
L'avantatge de la notació per a la generalitat introduïda per Frege rau en què mitjançant ella es poden expressar no només judicis com ara

(*a*)  (*b*) 

és a dir, judicis en l'expressió dels quals la concavitat figuri a continuació del traç vertical, sinó també judicis com ara

(*c*)  (*d*)  ,

és a dir, judicis en els quals l'expressió de la negació i el condicional figurin a continuació del traç del judici i precedeixin la concavitat que denota la generalitat. En aquest últim tipus de judici, a diferència del primer, no és possible la substitució de la lletra gòtica per quelcom arbitrari -car és evident, per exemple, que $\forall a \Phi a \rightarrow A$ pot ser vertadera i, en canvi, $\Phi(\Delta) \rightarrow A$ falsa. Aquest fet il·lustra, segons Frege, perquè la concavitat amb la lletra gòtica a dins és necessària, a saber, "perquè limita el domini [*Gebiet*] al qual es refereix la lletra. La lletra gòtica conserva la seva significació només dins dels límits dels seu domini".[1] Evidentment, el domini d'una lletra gòtica pot incloure el domini d'una altra lletra gòtica, com s'esdevé, per exemple, a

 .

En aquest cas, assenyala Frege, "s'han d'haver escollit lletres diferents i hom no pot posar a en lloc de e. Naturalment, és permès de substituir una lletra gòtica a tot arreu del seu domini per una altra lletra determinada, amb la condició que, on abans hi havia lletres diferents, després hi hagi també lletres diferents".[2] Només es permetran altres substitucions si la concavitat segueix immediatament el traç del judici, és a dir, si la lletra gòtica té com a

[1] *Frege 1964*, § 11, 20.
[2] *Ibid.*, § 11, 20-21.

domini tot el judici. En aquests casos, assenyala Frege, es pot abreujar la notació, eliminant la concavitat i substituint la lletra gòtica per la *lletra llatina* corresponent. Segons això, "*una lletra llatina té com a domini el contingut de tot el judici*"[1] i, per tant, la seva funció consisteix essencialment a expressar la *universalitat*, tal com s'apuntava al començament de *Begriffschrift*. Recíprocament, "*una lletra llatina pot substituir-se sempre per una lletra gòtica que no figuri encara en el judici*, amb la qual cosa s'ha de posar la concavitat immediatament després del traç del judici. Així, per exemple, en lloc de:

$$\vdash X(a)\,,$$

hom pot posar:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\, X(\mathfrak{a})\,,$$

si a figura només en els llocs argumentals de X".[2] Segons Frege, "també és evident, que de

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\!\!-\Phi(a) \\ \llcorner\!-A \end{array}\,,$$

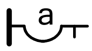
hom pot derivar:

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Phi(\mathfrak{a}) \\ \llcorner\!\!-\!\!-A \end{array}\,,$$

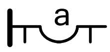
si A és una expressió, en la qual no hi figura a, i si a només apareix en $F(a)$ en els seus llocs argumentals".[3] En el primer cas, la condició que a figuri només en els llocs argumentals de $X(a)$ equival a la condició que avui en dia expressaríem dient que a no sigui una *variable lliure* -car en aquest cas, $X(a) \nvDash \forall a X(a)$ i, pel teorema de coherència, $X(a) \nvdash \forall a X(a)$. Es tracta, doncs, de la *regla de generalització*. En el segon cas, s'introdueix una nova regla que permet inferir $A \rightarrow \forall a \Phi(a)$ a partir de $A \rightarrow \Phi(a)$, quan a no figura en A i no és una variable

1 *Ibid.*, § 11, 21.
2 *Ibid.*, § 11, 21.
3 *Ibid.*, § 11, 21.

lliure en Φ(*a*) -de fet n'hi hauria prou en imposar que *a* no fos lliure en *A*. Es tracta, doncs, de la *regla de generalització del condicional*. Notem finalment que, donat que

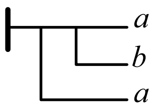
 Φ(a)

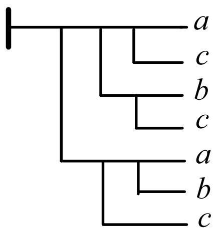
significa que "per qualsevol *a*, Φ(a) és negat" o, el que és el mateix, "no existeix cap *a* que tingui la propietat Φ", llavors

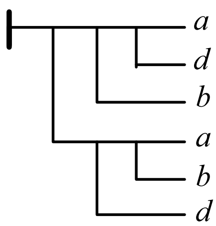
 Φ(a)

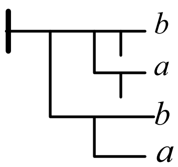
significarà que "existeix algun *a* que té la propietat Φ", això és, "existeix algun *a*, tal que Φ(a) és afirmat". D'aquesta manera s'expressaran, doncs, els *enunciats existencials*.

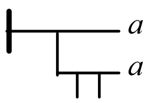
En la segona part de *Begriffschrift*, Frege presenta el càlcul lògic pròpiament dit de manera axiomàtica, això és, introduint un conjunt d'axiomes, proposicions evidents per si mateixes que no requereixen ser demostrades, i deduint a partir d'elles i les regles de deducció, tot un seguit de proposicions o teoremes. Els axiomes són les proposicions següents:

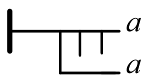
(1) 

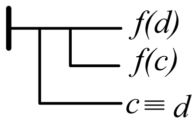
(2) 

(8) 

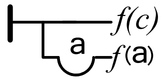
(28) 

(31) 

(41) 

(52) 

(54) $c \equiv c$

(58) 

Els sis primers axiomes donen raó del nivell proposicional del càlcul -els tres primers de la part purament implicativa i els altres tres de les propietats característiques de la negació. Els tres darrers donen raó de la generalitat i la identitat, és a dir, del càlcul funcional amb identitat. Evidentment, a aquests axiomes cal afegir-hi les regles d'inferència que Frege ha introduït prèviament: *modus ponens*, *generalització* i *generalització del condicional*. Podríem expressar-los, en notació moderna, de la següent manera:

$$a \rightarrow (b \rightarrow a) \qquad (1)$$
$$[c \rightarrow (b \rightarrow a)] \rightarrow [(c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a)] \qquad (2)$$
$$[d \rightarrow (b \rightarrow a)] \rightarrow [b \rightarrow (d \rightarrow a)] \qquad (8)$$
$$(b \rightarrow a) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b) \qquad (28)$$
$$\neg\neg a \rightarrow a \qquad (31)$$
$$a \rightarrow \neg\neg a \qquad (41)$$
$$(c = d) \rightarrow (Fc = Fd) \qquad (52)$$
$$c = c \qquad (54)$$
$$\forall x Fx \rightarrow Fc \qquad (58)$$

Amb tot, és important destacar que Frege formula tots els axiomes amb lletres llatines, la qual cosa significa, d'acord amb el que ha explicat abans, que totes les proposicions anteriors són abreujaments de les proposicions que s'obtindrien en substituir les lletres llatines per gòtiques i prefixar a aquestes expressions les concavitats amb les lletres gòtiques corresponents. Així, les proposicions (1) i (58) -per citar un exemple de la lògica proposicional i un altre de la lògica funcional- són abreujaments dels axiomes -en simbologia actual:

$$\forall a \forall b (a \rightarrow (b \rightarrow a))$$
$$\forall f \forall c (\forall a fa \rightarrow fc).$$

Quines conseqüències té això a nivell sintàctic? Sembla clar, en primer lloc, que mitjançant la utilització de lletres llatines es vol, d'una banda, evidenciar la universalitat dels axiomes i, d'una altra, disposar d'una formulació que permeti emprar-los a nivell deductiu. I això últim està relacionat segurament amb la no formulació explícita de la *regla de substitució,* que Frege empra abastament en les nombroses deduccions de teoremes que es duen a terme en el segon capítol de *Begriffschrift*. Recordem, en efecte, que les lletres llatines s'introdueixen en la primera part de *Begriffschrift*, tal com reconeix el mateix Frege, seguint el model de les lletres emprades en l'anàlisi matemàtica "on cada lletra representa o bé un nombre indeterminat o bé una funció indeterminada", la qual cosa "fa possible usar les lletres per expressar la validesa universal de les proposicions, com a

$$(a+b)c = ac + bc\text{''.}$$ [1]

Ara bé, la proposició anterior és vàlida universalment si, i només si, és equivalent a

$$\forall a \forall b \forall c[(a+b)c = ac + bc]$$

o, el que és el mateix, si hom pot *substituir salva veritate* les lletres *a*, *b* i *c* per qualsevol expressió ben formada, el rang de valors de les quals coincideixi amb el rang dels quantificadors amb el quals hem clausurat universalment la primera proposició. Ara bé, aquestes substitucions es realitzen habitualment en matemàtiques sense cap regla o argumentació que les justifiqui. És imaginable, doncs, que un raonament com l'anterior portés Frege a formular els axiomes lògics exclusivament amb lletres llatines i a considerar innecessària la formulació d'una regla de substitució. Anàlogament, una fórmula com ara

$$a \to (b \to a)$$

serà vàlida universalment en tant que és equivalent a

$$\forall a \forall b(a \to (b \to a))$$

---

1 *Ibid.*, § 1, 1.

i aquesta equivalència es la que fa que totes les *substitucions* en la primera fórmula de les lletres *a* i *b* per qualssevol lletres o expressions que denotin un contingut judicable, donin lloc a una proposició vertadera. Finalment, és interessant destacar que Frege és conscient que el conjunt d'axiomes anteriors no és únic i que "potser hi ha encara un altre conjunt de judicis amb els quals, un cop afegits aquells [*judicis*] continguts en les regles, es podrien deduir totes les lleis del pensament".[1] De fet, aquest sistema d'axiomes no és *independent* donat que, tal com demostrarà *Łukasiewicz* en l'article "Zur Geschichte der Aussagenlogik" ["Sobre la història de la lògica proposicional "] (*1934*), el tercer axioma es pot demostrar a partir dels dos primers i les regles de *substitució* i *modus ponens*.[2] Remarquem també que tots els axiomes es presenten acompanyats de la seva interpretació semàntica, però això no fa que Frege es plantegi cap qüestió de tipus semàntic com, per exemple, la *suficiència* del càlcul. En conclusió, podem afirmar que les aportacions de *Begriffschrift* en el camp de la lògica marquen un abans i un després en la història d'aquesta disciplina i la converteixen en una de les seves obres cabdals. En aquest sentit, no sembla exagerat dir que Frege és el pare de la lògica moderna i que la data de naixement d'aquesta coincideix amb la publicació de *Begriffschrift*. En aquesta obra, en efecte, es presenten per primera vegada en la història la lògica proposicional i quantificacional com un *sistema formal* o *logístic*, és a dir, especificant-se a banda de tota consideració referent al significat de les expressions, els *símbols primitius*, les *regles de formació* i *deducció* i els *axiomes lògics*. D'aquesta manera, totes les deduccions es duen a terme d'acord amb la forma de les expressions, deixant-se de banda tot recurs al seu significat o a la intuïció. A més, ambdues lògiques -proposicional i quantificacional- apareixen nítidament diferenciades, encara que formant un tot orgànic. En efecte, tal com hem vist, Frege introdueix primer el càlcul proposicional a través de la definició del *condicional* i la *negació*, la regla de *modus ponens* i els *axiomes* (1), (2), (8), (28), (31) i (41). Després, un cop introduïdes les nocions de *funció* -en el sentit abans explicat- i *quantificador*, trets distintius de la lògica quantificacional respecte de la proposicional, introdueix càlcul quantificacional amb identitat a partir de les regles de *generalització* i *generalització del condicional* i els axiomes (52), (54) i (58). Finalment, cal recordar que tot això és exposat amb un rigor i claredat que ultrapassa amb escreix el dels seus contemporanis i successors immediats.

---

1 *Ibid.*, § 13, 25.

2 *Cf. Łukasiewicz 1970*, 215-16.

3. La filosofia de les matemàtiques de *Begriffschrift*

Tal com hem dit en la secció anterior, la tercera part de *Begriffschrift* es titula "Alguns tòpics sobre la teoria general de sèries". Des d'un punt de vista modern podríem entendre el que Frege anomena una *sèrie f* [*f-Reihe*] com un parell ordenat $\langle X,f \rangle$, on X representa un conjunt qualsevol no buit i f una relació binària en X, *i.e.* $f \subseteq X \times X$. Ara bé, encara que aquesta interpretació ens pot ajudar a entendre millor la teoria de sèries fregeana s'ha d'agafar amb moltes precaucions. En primer lloc, perquè la noció de *conjunt* o *classe* és completament aliena al desenvolupament de *Begriffschrift*. En segon lloc, i relacionat amb l'anterior, perquè el concepte fregeà de *funció* -a partir del qual s'introdueixen les propietats i relacions- és més intensional que no pas el concepte modern, purament extensional, de funció -notem, en efecte, que introduir les funcions com a *conjunts* de parells ordenats faria dependre la teoria de sèries de la teoria de conjunts. De fet, el que Frege anomena una *sèrie f* és simplement una relació binària en intensió -Frege en diu també a vegades un *procediment*-, fixa, però arbitrària, la qual s'*aplica* sobre *tots* els *objectes* de l'univers[1] -això el permetrà, en suma, desenvolupar una teoria *general* de sèries.

La definició més important de la tercera part és la definició de la relació que, a partir de Russell i Quine s'anomenarà l'*ancestral*, i el resultat principal assolit en ella és precisament la prova de la seva *connectivitat*. Per definir l'ancestral de *f*, una vegada fixada una sèrie *f* arbitrària, Frege defineix prèviament una propietat que simbolitzarem per Her(F)[2] ("la propietat F és hereditària a la sèrie *f*"), en la proposició 69, per la condició:

$$\forall d \forall a (Fd \wedge fda \rightarrow Fa).$$

Frege defineix llavors l'*ancestral* de *f*, f^*xy ("y segueix a x en la sèrie *f*" o "x precedeix a y en la sèrie *f*"), en la proposició 76, per la següent condició:

$$\forall F[\mathrm{Her}(F) \wedge \mathrm{In}(x,F) \rightarrow Fy],$$

[1] Això suscita evidentment dificultats a l'hora d'interpretar el formalisme de *Begriffschrift*.

[2] La terminologia emprada al llarg d'aquesta secció està manllevada essencialment de l'article de Boolos "Reading the *Begriffschrift*" (*1985*). El lector interessat en la notació fregeana original pot fer fàcilment una lectura comparada amb l'ajut de les nombroses referències a *Begriffschrift* que trobarà en aquesta secció i les explicacions de la notació lògica d'aquesta obra que hem fet en la secció anterior.

on $\mathrm{In}(x, F)$ és un abreujament de la condició $\forall a(fxa \to Fa)$ -"després de x, la propietat F és inherida en la sèrie f"- de la definició de Her(F). Els dos resultats més importants demostrats a partir d'aquestes definicions són la següent forma generalitzada del *principi de inducció* (proposició 81):

$$[Fx \land \mathrm{Her}(F) \land f^{*}xy] \to Fy$$

és a dir:

> "si x té la propietat F que és hereditària a la sèrie f i y segueix a x a la sèrie f, llavors y té la propietat F",

i la *transitivitat* de l'ancestral (proposició 98):

$$f^{*}xy \land f^{*}yz \to f^{*}xz.$$

Una vegada demostrat aquest resultat, Frege introdueix dues definicions més. La primera és la definició de l'*ancestral feble* de f, que simbolitzarem per $f^{*}_{=}xz$ i que Frege llegeix indistintament com "z pertany a la sèrie f que comença amb x" o "x pertany a la sèrie f que acaba amb z". Aquesta relació es defineix a la proposició 99 per la condició:

$$f^{*}xz \lor z = x.$$

La segona és la definició de "*el procediment f* és unívoc [*eindeutig*]", això és, "la relació f és funcional" o simplement "f és una funció", que simbolitzarem per Func(f). Aquesta propietat es defineix, en la proposició 115, per la condició:

$$\forall d \forall e \forall a(fde \land fda \to a = e).$$

A partir d'aquestes definicions, Frege enuncia la proposició 133, que expressa la propietat que hem anomenat *connectivitat* de l'ancestral, amb la qual es conclou *Begriffschrift*:

$$[\mathrm{Func}(f) \wedge f^{*}xm \wedge f^{*}xy] \rightarrow f^{*}ym \vee f^{*}_{=}my,$$

això és:

> "si *f* és unívoca, i si *m* i *y* segueixen a *x* a la sèrie *f*, llavors *y* precedeix a *m* a la sèrie *f* o pertany a la sèrie *f* que comença amb *m*",

o, en altres paraules:

> "si *f* és funcional, llavors l'ancestral de *f* connecta qualssevol dos elements *m*,*y* que tenen amb algun altre element *x* la relació ancestral".

Una vegada exposat l'esquelet de la tercera part de *Begriffschrift*, podem fer una primera valoració dels resultats assolits. Si hom observa la taula amb la qual acaba *Begriffschrift*, on s'indica quines proposicions s'han emprat en la demostració de cada una de les proposicions de *Begriffschrift*, comprovarà que les proposicions 98 i 133 no s'utilitzen en la demostració de cap altra proposició. Això suggereix que aquestes proposicions -potser juntament amb la proposició 81- són els resultats principals que Frege aporta a *Begriffschrift* en defensa de la tesi logicista. Aquestes proposicions enuncien, com ja hem explicat, la *transitivitat* i *connectivitat* de l'ancestral, propietats que també compleix la relació *menor que,* definida de la forma habitual en els nombres naturals, la qual és l'ancestral de la relació *segueix* o *precedeix immediatament a*. Frege introduirà aquesta relació a *Grundlagen* (§ 76), la qual, junt amb la definició del nombre 0 (§ 74), li permetrà definir els *naturals* o *nombres finits* com els nombres n tals que $0 \leq n$ i demostrar la infinitud de la sèrie dels nombres naturals (*Cf. infra*, § 5). Això indica clarament que la defensa de la tesi logicista passa a *Begriffschrift* per exposar una teoria general de sèries, en la qual, partint d'una sèrie *f* qualsevol, es defineix una relació, la relació ancestral, que indueix en aquesta sèrie una estructura d'ordre completament anàloga a la induïda en la sèrie dels nombres naturals per la relació *menor que*. En aquest sentit és interessant remarcar, tal com ha fet el mateix Dedekind en diverses ocasions,[1] que l'*ancestral* juga en la teoria general de sèries fregeana i en la ulterior construcció dels nombres naturals a partir d'ella, un paper completament anàleg al paper jugat per la noció de cadena en l'anàlisi dedekindiana del concepte de nombre.

[1] *Cf. Dedekind 1932*, 342.

Exactament, la relació entre les sèries f de Frege i les cadenes de Dedekind ve donada pel fet que, si f és injectiva, l'extensió de la propietat $f^{*}_{=}ax$ és precisament a_0, la cadena de a, això és:

$$a_0 = \bigcap\{X : \langle X,f\rangle \text{ és una cadena i } a \in X\},$$

de manera que la construcció fregeana dels naturals com la sèrie f que comença amb el 0 -on f és la relació successor- té una similitud evident amb la definició de Dedekind dels naturals com la cadena del 1, *i.e.* $N = 1_0$. La diferència fonamental entre ambdós autors rau en què, tal com hem vist en el capítol anterior, el punt de partida de Dedekind és l'infinit mentre que, tal com veurem en les seccions següents, el punt de partida de Frege és la mateixa definició de nombre. Recordem, en aquest sentit, que el procés seguit per Frege per demostrar la tesi logicista havia de consistir, segons reconeixia el mateix autor, "a intentar reduir primer el concepte d'ordre en una sèrie al de successió lògica, per avançar d'aquí al concepte de nombre" (*ja citat: Cf. supra*, § 2). Ara bé, és evident que Frege només escomet a *Begriffschrift* la primera part del pla previst, demostrant a més alguns principis bàsics que aquestes sèries o seqüències comparteixen amb la sèrie dels nombres naturals. La segona part, la definició del concepte de nombre, l'escomet a *Grundlagen* i recull a nivell formal a *Grundgesetze* i, tal com veurem, és precisament a partir d'ella que es demostren en aquesta obra els axiomes de Peano-Dedekind per a l'aritmètica. En aquest sentit, W. Demopoulos ha suggerit en l'article "Frege and the Rigorization of Analysis" (*1994*), "una divisió natural en el logicisme fregeà entre el seu primer interès amb "principis" com ara el de connectivitat de l'ancestral i la reconstrucció del raonament inductiu, i el seu interès posterior amb els nombres com "objectes", l'interès a *Grundlagen* i a *Grundgesetze* amb la definició dels nombres naturals i la prova de la seva infinitud".[1] Ara bé, aquesta tesi pot conduir fàcilment a una visió errònia del logicisme fregeà que oblidi el seu caràcter programàtic i profundament unitari que, en el cas de l'aritmètica, comença amb la reducció del concepte d'ordre en una sèrie al de seqüència lògica a *Begriffschrift* i culmina amb la definició del concepte de nombre i la demostració dels axiomes de Peano-Dedekind a *Grundlagen* i *Grundgesetze*.[2]

---

[1] *Demopoulos 1995*, 82-83.

[2] En particular, com ja hem dit abans, la definició en aquestes obres de N com la sèrie f que comença amb el 0, depèn de forma òbvia de la definició de l'ancestral feble de f, a la qual Frege arriba seguint exactament els mateixos passos que ha seguit a *Begriffschrift*.

Una altra qüestió a tenir en compte és que, des del punt de vista de Frege, l'èxit assolit a *Begriffschrift* en la demostració de la tesi logicista, no rau tant en la reducció del concepte d'ordre al de seqüència lògica i la demostració de les propietats bàsiques d'aquestes, com en el fet que aquests resultats hagin estat obtinguts a partir "d'una cadena deductiva sense llacunes", evitant-se així que pogués introduir-se "quelcom intuïtiu".[1] Frege insisteix sovint en aquest fet i posa com exemple de demostració "pas a pas" i "sense llacunes" la demostració de la proposició 133, afirmant que només en base a una demostració d'aquesta mena es pot concloure que aquesta proposició ha estat assolida sense recórrer a la intuïció i és, per tant, una proposició analítica. Així, per exemple, Frege assenyala a *Grundlagen*, referint-se als estàndards de rigor esmentats, que "d'aquesta manera he demostrat una proposició [133] sense prendre cap axioma de la intuïció, que hom podria considerar a primera vista sintètica".[2] Quant a la valoració que fa el propi Frege dels resultats assolits a *Begriffschrift* en favor de la tesi logicista, és interessant remarcar també que no faci mai esment de la proposició 98 o, fins i tot, de 81, la qual cosa sembla indicar que Frege considerava poc rellevant la demostració d'aquestes proposicions per a l'atac al punt de vista kantià segons el qual els judicis de l'aritmètica són sintètics. El motiu d'això és segurament que aquestes proposicions se segueixen de forma bastant elemental a partir de les definicions, tot al contrari del que passa amb la proposició 133, la demostració de la qual ocupa bona part de la secció tercera de *Begriffschrift*, per la qual cosa és probable que Frege considerés les proposicions 98 i 81 exemples poc significatius contra el kantisme -una contrarèplica seria, en efecte, que Frege havia aconseguit demostrar tan sols una proposició trivial de les matemàtiques en termes lògics, però encara cap proposició la demostració de la qual requerís un cert grau d'elaboració matemàtica. Respecte això, Boolos ha suggerit en l'article "Reading the *Begriffschrift*" (*1995*) que, encara que la demostració de 98 "és certament una demostració amb mitjans exclusivament lògics, 98 no sembla a primera vista que estigui basada en la intuïció".[3] L'argument de Boolos és que "ningú pot pensar de debò que tot judici matemàtic hagi d'estar necessàriament basat en alguna intuïció. Car hi ha certament alguns judicis matemàtics trivials que no han d'estar necessàriament basats així [...] entre els judicis d'aquesta mena hi ha aquells que se segueixen de les definicions amb una petita quantitat de

1 *Frege 1964*, X.

2 La relació entre el logicisme fregeà i l'exigència de rigor i el significat exacte dels termes analític i sintètic en Frege seran explicats en la secció cinquena.

3 *Demopoulos 1995*, 168.

manipulació lògica. I un d'aquests és la proposició 98 de Frege".[1] El cert és però que segons els kantians de l'època de Frege, *tots* els judicis de l'aritmètica són sintètics i, per tant, estan basats en la intuïció. Fins i tot les proposicions més trivials, a les quals es refereix Boolos i un exemple de les quals seria 98, es demostraven apel·lant a les intuïcions d'espai i temps, com ens ho mostren alguns dels exemples discutits per Frege a *Grundlagen* -de fet, no és difícil imaginar com seria una demostració intuïtiva d'aquesta proposició.

En qualsevol cas, el desenvolupament matemàtic de la tercera part de *Begriffschrift* i, en particular, la demostració de les proposicions 98 i 133, planteja alguns interrogants que qüestionen en certa mesura el suposat caràcter analític d'aquestes proposicions i, el que és més greu, la consistència de *Begriffschrift*. Tal com ha assenyalat Boolos en l'article abans esmentat, en efecte, Frege utilitza per demostrar les proposicions anteriors una regla de substitució, no formulada explícitament, que li permet substituir una lletra de relació per una fórmula. Així, per exemple, per demostrar la proposició 98, Frege obté a partir de la proposició 81, per lògica proposicional, la proposició 84:

$$[\mathrm{Her}(F) \wedge F(x) \wedge f^{*}xy] \rightarrow Fy,$$

substitueix en aquesta proposició x per y, y per z i F per $f^{*}xa$, amb la qual cosa obté la proposició:

$$[\mathrm{Her}(f^{*}xa) \wedge f^{*}xy \wedge f^{*}yz] \rightarrow f^{*}xz.$$

Finalment, per la proposició anterior i per la proposició 97, que afirma que $\mathrm{Her}(f^{*}xa)$, obté per lògica proposicional que:

$$f^{*}xy \wedge f^{*}yz \rightarrow f^{*}xz.$$

Frege no fa cap comentari especial respecte a la substitució de F per $f^{*}xa$, per la qual cosa és lícit imaginar que considerava les substitucions d'aquesta mena del mateix tipus que la substitució d'una variable proposicional per una fórmula. Ara bé, com és ben sabut, la regla de substitució que autoritza reemplaçar una variable de propietat per una fórmula oberta és equivalent al següent *principi de comprehensió per a conceptes*:

1 *Ibid.*, 167-68

$$\exists P \forall x(Px \leftrightarrow \varphi(x)),$$

per a tota fórmula $\varphi(x)$ en la qual la variable de predicat P no és una variable lliure, mentre que la regla de substitució que autoritza reemplaçar una variable de relació per una fórmula oberta és equivalent al següent *principi de comprehensió per a relacions*:

$$\exists R \forall x \forall y(Rxy \leftrightarrow \varphi(x,y)),^1$$

per a tota fórmula $\varphi(x,y)$ en la qual la variable de relació R no és una variable lliure. Evidentment, aquests *principis de comprehensió* suposen assumir l'existència d'una propietat o relació per cada fórmula oberta $\varphi(x)$ o $\varphi(x,y)$. Per exemple, en el cas que ens ocupa, per cada fórmula del tipus f^*xa, hi haurà una propietat que tindran precisament aquells objectes que satistacin la fórmula en qüestió -això és, els *a*s que segueixin a x en la sèrie f. Això ha dut Boolos a qüestionar que les proposicions 98 i 133 suposin cap evidència a favor de la tesi logicista, car un interlocutor kantià podria argumentar que és només gràcies a la *intuïció* que hom pot justificar l'existència d'una propietat per a les fórmules del tipus f^*xa -de fet, el propi Frege *entén* f^*xa com una fórmula que expressa la propietat de seguir a x a la sèrie f- i, en general, la regla de substitució o l'esquema de comprehensió. Val a dir, amb tot, que és dubtós que Frege o qualsevol interlocutor kantià -real, no fictici- acceptés la intuïció de la qual parla Boolos com la mena d'intuïció de la qual parla Kant, car una cosa és la intuïció que pot justificar la substitució de propietats que tenen objectes qualssevol en una sèrie f arbitrària i, una altra ben diferent, la intuïció que pot justificar la mateixa operació en el cas de propietats i fórmules relatives a la sèrie dels nombres naturals. El raonament anterior permet veure també l'altra problema, molt més greu, al qual ens referíem abans. Tal com hem vist, en efecte, la regla de substitució permet substituir una lletra de propietat qualsevol per una fórmula del tipus f^*xa. Ara bé, la definició de f^* -l'ancestral de f- conté un quantificador de segon ordre i, per tant, aquesta relació està definida de forma impredicativa, de manera que Frege es troba a un pas de la paradoxa de Russell -el mateix s'esdevé, tal com hem explicat a la secció anterior, en la derivació de la fórmula 77 i 91, en què Frege substitueix F per *a* en *f(a)* i després substitueix F per f. Frege acabarà caient en la paradoxa a *Grundgesetze*

1 Per a la demostració de l'equivalència entre la regla de substitució i els principis de comprehensió anteriors, vegeu *Boolos 1985*, 161-62.

-curiosament per la via extensional, perquè la jerarquia de nivells de funcions i conceptes d'aquesta obra evita les paradoxes intensionals (*Cf. infra*, § 11).[1]

4. La polèmica Frege-Schröder

Frege publicà *Begriffschrift* l'any 1879, tot just un any i escaig després que Schröder publiqués la seva obra *Der Operationskreis des Logikkalkuls* (*1877*). L'any 1880, Schröder publicà en la revista *Zeitschrift für Mathematik und Physik* "Anzeige von Gottlob Freges *Begriffschrift*" ["Ressenya de la *Begriffschrift* de Frege"] (*1879*). Arran de la crítica ferotge que Schröder adreçà a l'obra de Frege, aquest es veié obligat a defensar-se i escriví un llarg i acurat article titulat "Booles rechnende Logik und die Begriffschrift" ["El càlcul lògic de Boole i la Conceptografia"] (*1880?*), que fou rebutjat per diverses revistes de filosofia i matemàtiques, per la qual cosa romangué inèdit fins que es publicaren els *Nachgelassene Schriften* [*Escrits postums*] de Frege (*1969*). L'oportunitat de respondre a les objeccions adreçades a la seva *Begriffschrift* li arribà a Frege en celebrar-se el gener de 1882 una trobada de la *Jenaische Gessellschaft für Medicin und Naturwissenchaft*, davant la qual va pronunciar una conferència, publicada aquell mateix any en les actes de sessió [*Sitzungberichte*] de la trobada amb el títol "Über den Zweck der Begriffschrift" ["Sobre la finalitat de la Conceptografia"] (*1882_b*). D'una altra banda, el mateix Frege publicà uns anys més tard un article titulat "Kritische Beleuchtung einiger Punkten in E. Schröder Vorlesungen über die Algebra der Logik" ["Examen crític d'alguns punts de *Vorlesungen über die Algebra der Logik* d'E. Schröder"] (*1895*), en el qual critica alguns punts essencials del primer volum de l'obra de Schröder, publicat l'any 1890. Com que en el capítol dedicat a Schröder (*Cf. supra*, cap. III, §1 i §2), ja ens hem fet ressò d'aquesta crítica, ens referirem ara als aspectes essencials de la polèmica mantinguda entre Schröder i Frege, tal com aquesta apareix a l'article del primer de 1880 i en els articles del segon de 1880 ca. i 1882 abans esmentats.

Tal com hem explicat en la segona secció, Frege entenia la seva conceptografia com un llenguatge de fórmules que realitzava alhora l'ideal leibnizià d'una *characteristica*

[1] Més exactament, el que evita les paradoxes de tipus intensional és un dels principis en què es fonamenta aquesta jerarquia, a saber, que una funció o concepte, degut a la seva naturalesa insaturada, no pot ser mai un argument d'una altra funció o concepte.

universalis i *calculus ratiocinator*. Però, segons Schröder, la *Begriffschrift* de Frege "en comptes d'apuntar cap a una característica universal [...] apunta definitivament cap el "calculus ratiocinator" de Leibniz. I, en aquesta direcció, el present llibret fa un avenç que consideraria digne de crèdit, si no fos perquè una gran part d'allò que intentà ja ha estat assolit per algú altre i, de fet (tal com demostraré) d'una forma indubtablement més adient".[1] Schröder es refereix naturalment a Boole, els èxits del qual Frege "havia ignorat completament".[2] En concret, segons Schröder, llevat del que Frege diu sobre els conceptes de *funció* i *generalitat*, que mereixen els seus elogis perquè permeten, entre d'altres coses, expressar correctament els judicis particulars, i la seva *teoria de sèries*, el llibre de Frege "està dedicat a l'establiment d'un llenguatge de fórmules que coincideix essencialment amb el tipus de presentació que fa Boole dels judicis i amb el càlcul booleà dels mateixos i que, certament, en cap cas va més enllà que aquest".[3] De fet, segons Schröder, la *Begriffschrift* de Frege, "podria considerar-se una transcripció del llenguatge de fórmules booleà",[4] però l'ús per part de Frege de símbols artificials i diferents dels emprats en àlgebra, amaga "les moltes i belles, reals i genuïnes analogies que el llenguatge formal de la lògica té en comparació amb el matemàtic".[5] Finalment, assenyala Schröder, la notació fregeana de tipus bidimensional suposa "una pèrdua monstruosa d'espai [...] que hauria de decidir la disputa a favor de l'escola booleana".[6] Pel que fa a la teoria general de sèries, que constitueix la tercera part de *Begriffschrift*, li sembla a Schröder que és "molt abstrusa" i que "no conté res de valor".[7] En definitiva, assegura Schröder, si l'objectiu principal de *Begriffschrift* és l'anàlisi lògica dels judicis de l'aritmètica i, en paraules del mateix Frege, "veure fins a on hom pot arribar en aritmètica només mitjançant deduccions lògiques", llavors s'ha de concloure que el llibre en sí no té gaire sentit, perquè aquest objectiu ja ha estat assolit plenament "a través de les perspicaces recerques de Hermann Grassmann".[8]

Per respondre a les crítiques de Schröder, Frege intenta demostrar en els dos articles abans esmentats, la superioritat de la seva conceptografia sobre l'àlgebra lògica de Boole i els seus seguidors. En primer lloc, Frege acusa Boole de voler construir simplement una "tècnica

1 *Frege 1972*, 219-20.
2 *Ibid.*, 220.
3 *Ibid.*, 221.
4 *Ibid.*, 221.
5 *Ibid.*, 221.
6 *Ibid.*, 229.
7 *Ibid.*, 230-31.
8 *Ibid.*, 231.

per resoldre problemes lògics sistemàticament",[1] això és, un mer *calculus ratiocinator* restringit a la lògica pura. Per contra, el seu objectiu hauria estat de bon començament l'"expressió d'un contingut", és a dir, la construcció d'una *lingua characteristica* per les matemàtiques, no només un *calculus* limitat a la lògica pura".[2] Com ja sabem, en efecte, els objectius i interessos de Boole i Frege són completament diferents. Així, mentre que l'objectiu fonamental del primer és fornir una lògica abstracta en base al fet que "la validesa dels processos de l'anàlisi no depenen pas de la interpretació dels símbols que hi són emprats, sinó només de les seves lleis de combinació" (*ja citat*: *Cf. supra*, cap. I, § 1), l'objectiu fonamental de Frege és fornir un llenguatge que sigui capaç d'expressar el contingut de les diverses ciències i fonamentar-les més sòlidament en base al fet que les seves lleis són completament generals i no depenen de les característiques específiques dels objectes de cada ciència. En aquest sentit, el mateix Frege reconeix en l'article "Über den Zweck der Begriffschrift" de 1882 que:

> El meu objectiu era diferent del de Boole. Jo no volia representar una lògica abstracta en fórmules, sinó expressar un contingut per mitjà de signes escrits de forma més precisa i perspicaç que la que és possible amb paraules. De fet, jo no volia crear només un mer *calculus ratiocinator*, sinó també una *lingua characteristica* en el sentit de Leibniz.[3]

Segons Frege, en efecte, la lògica de Boole "no és adequada per a la expressió d'un contingut, i aquest no és tampoc el seu objectiu".[4] El motiu és que Boole agafa en préstec els símbols de l'aritmètica per tal de bastir el seu càlcul lògic i, per tant, no pot emprar aquests mateixos símbols per a l'expressió dels judicis de l'aritmètica:

> L'analogia entre els mètodes del càlcul de la lògica i l'aritmètica, que per Boole és tan valuosa, només pot produir confusió quan les dues es posen mútuament en contacte. El llenguatge simbòlic de Boole només és concebible completament separat de l'aritmètica.[5]

---

1 *Frege 1969*, 13.
2 *Ibid.*, 13.
3 *Frege 1964*, 97-98.
4 *Ibid.*, 100.
5 *Ibid.*, 100.

En altres paraules, el llenguatge simbòlic de Boole no és vàlid per a la fonamentació lògica de l'aritmètica, perquè aquesta requereix separar nítidament els símbols lògics dels aritmètics, mentre que aquell comprèn un únic tipus de símbols, els quals s'interpreten indistintament tant lògicament com aritmètica -Frege posa com exemple el símbol +, el qual s'interpreta en determinats contextos com la disjunció lògica i en altres com la suma aritmètica, però, com ja sabem, això és extensible a tots els signes de l'àlgebra de la lògica booleana. Per contra, en la mesura que la conceptografia de Frege vol expressar el contingut dels judicis de l'aritmètica, ha d'incorporar, a més dels signes ja disponibles en aquesta ciència, nous signes que permetin combinar els continguts expressats pels signes prèviament existents. Per tant, Frege ha de distingir clarament els signes aritmètics dels signes lògics per tal d'evitar tota possible ambigüitat i confusió.

En segon lloc, gràcies a la notació per a la generalitat, la conceptografia de Frege pot expressar tota una sèrie de judicis que no són expressables en l'àlgebra de la lògica de Boole. Tal com afirma Frege, contràriament a l'opinió de Schröder, "no tot el que expresso [a la Conceptografia], pot ser traduït a la notació booleana, mentre que la traducció conversa sempre és possible".[1] Com era d'esperar, Frege posa com exemples els *judicis particulars*, que només troben una "expressió inadequada" en l'àlgebra lògica de Boole i els *judicis existencials*, per als quals no hi ha "aparentment cap expressió".[2] Frege és ben conscient que la importància de la seva notació per a la generalitat rau en el fet que permet "la delimitació del domini que ha d'abastar la generalitat", donat que "a vegades és necessari limitar la generalitat a una part del judicis".[3] En altres paraules, Frege era perfectament conscient que el punt clau de la seva notació per a la quantificació universal era que permetia delimitar perfectament l'abast dels quantificadors. La importància d'aquest fet rau principalment en què permet expressar en la conceptografia fregeana el que avui en dia anomenem *quantificació aniuada* [*nested quantification*], és a dir, la introducció de nous quantificador que cauen dins l'abast d'un altre quantificador, estant l'abast d'un i altre quantificador perfectament delimitat. Així mateix, la separació del predicat del quantificador i l'ús de variables lligades, permeten a Frege expressar els diferents tipus d'enunciats que contenen una *quantificació múltiple* (*Cf. supra*, § 2; *infra*, § 9). Frege no fa referència a aquest fet en la seva polèmica amb Schröder, però tant a *Begriffschrift* com en l'article "Booles rechnende Logik und die Begriffschrift" de 1880 ca. podem trobar nombrosos exemples d'enunciats que

---

1 *Frege 1969*, 15.
2 *Ibid.*, 15-16.
3 *Frege 1964*, 105.

contenen aquesta mena de quantificació. En concret, la notació fregeana per a la generalitat permet expressar fàcilment el quantificador existencial i combinar-lo amb el quantificador universal en un mateix bloc quantificacional i, per tant, expressar el que avui en dia anomenem *quantificació mixta*. Això és important perquè, entre d'altres coses, els enunciats que contenen blocs quantificionals del tipus $\forall x \exists y$, que expressen el que s'anomena sovint *dependència quantificacional*, són característics de la lògica de predicats poliàdica i permeten expressar la idea de la infinitud d'una sèrie en terme estrictament lògics d'una forma prou senzilla (*Cf. infra*, cap. VI, § 1). La notació per a la generalitat de Frege també permet el que havíem anomenat *referència múltiple dels quantificadors*, que queda completament fora de l'abast de l'àlgebra de la lògica boolena (*Cf. supra*, cap. III, §§ 8 i 10). És cert, com ja sabem, que Mitchell havia introduït originàriament un sistema de notació que permetia expressar determinats enunciats quantificacionals de la lògica monàdica i diàdica en el marc de l'àlgebra booleana. Però, la quantificació iterada queda també fora de l'abast del sistema de notació de Mitchell i, en canvi, és expressable en l'àlgebra general de la lògica peirciana (*Cf. supra*, cap. III, § 10) o en la conceptografia fregeana amb tota naturalitat. En definitiva, el que cal per desenvolupar quelcom similar a la lògica de predicats poliàdica o lògica de primer ordre moderna és separar el quantificador de l'expressió booleana i concebre els quantificadors com operadors sobre els arguments dels predicats i relacions que ocorren en aquella. I per això cal introduir signes específics per al quantificador universal i existencial i afegir variables tant als signes per als quantificadors com als símbols de predicats i relació. L'avantatge principal que s'aconsegueix amb aquesta doble ocurrència dels índexs o variables és que permet emprar el mateix índex o variable diverses vegades en l'expressió booleana i lligar totes aquestes ocurrències mitjançant un sol quantificador, això és, la referència múltiple dels quantificadors a la qual abans ens referíem. En definitiva, en el millor dels casos, l'àlgebra de la lògica booleana és equivalent a nivell expressiu a la lògica de predicats monàdica, però la introducció de les relacions fa entrar en escena enunciats que només són expressables en un sistema de notació que tingui la mateixa potència expressiva que la lògica de predicats poliàdica, car ha de ser capaç d'expressar totes les subtileses abans esmentades que sorgeixen en considerar la possibilitat de quantificar sobre els arguments d'una relació. Ara bé, la introducció de relacions és absolutament necessària per al projecte fregeà de reducció de l'aritmètica a la lògica, la qual cosa explica el seu desenvolupament de la lògica poliàdica. De fet, com hem vist en la secció anterior el concepte fonamental de la tercera part de *Begriffschrift* és el de *sèrie f*, on *f* és una relació binària, i la definició més important és la de l'*ancestral* de *f*, això és, la relació $f^{*}xy$. Gràcies a aquesta definició, Frege pot demostrar el *principi d'inducció* en termes exclusivament lògics. Tal com veurem en les seccions dedicades a l'estudi de la filosofia de les matemàtiques de *Grundlagen* i *Grundgesetze*, aquesta necessitat de recórrer a la lògica de predicats poliàdica per tal de definir els conceptes fonamentals de l'aritmètica en termes lògics i demostrar els teoremes de l'aritmètica a partir dels axiomes i regles de la lògica és encara més evident (*Cf. infra*, §§ 5 i 10).

Una altra qüestió que cal tenir en compte per assolir una valoració adequada de la lògica de *Begriffschrift*, és que el sistema lògic exposat en la segona part d'aquesta obra no pot donar raó de la lògica emprada en la tercera part per desenvolupar la seva teoria general de sèries. En poques paraules: mentre que el sistema lògic exposat en la primera part es correspon essencialment amb la lògica de primer ordre, la lògica pressuposada en el desenvolupament de la tercera part es correspon essencialment amb la lògica de segon ordre. Tal com hem vist en la secció anterior, en efecte, la definició més important d'aquesta tercera part, la definició d'ancestral -i, per tant, també l'enunciat del principi d'inducció- conté una quantificació de segon ordre i, en concret, una quantificació sobre relacions. Per tant, un sistema lògic que volgués donar raó de la lògica emprada per Frege en la tercera part de *Begriffschrift* hauria d'incloure, a banda, dels axiomes i regles de primer ordre enunciats per Frege en la segona part, els axiomes i regles específics de la lògica de segon ordre. A més, tal com hem explicat també en la secció anterior, Frege empra en la tercera part de *Begriffschrift* una regla de substitució que permet reemplaçar una variable de propietat o relació per una fórmula. Ara bé, acceptar aquesta regla és equivalent a assumir l'existència d'una propietat o relació per a cada fórmula oberta amb una o dues variables lliures. Per tant, o bé cal incorporar també al sistema lògic de *Begriffschrift* la regla de substitució emprada per Frege o bé els *principis de comprehensió* abans esmentats que expliciten l'existència d'una propietat o relació per cada fórmula oberta del tipus $\varphi(x)$ o $\varphi(x,y)$, els qual són també evidentment axiomes de segon ordre. Aquesta discussió és important perquè la lògica emprada per Frege a *Begriffschrift* per desenvolupar la seva teoria de sèries és precisament la lògica que pressuposa l'anàlisi del concepte de nombre i les demostracions de les propietats fonamentals dels nombres que Frege esbossa a *Grundlagen der Arithmetik*, que estudiarem a continuació.

5. *Die Grundlagen der Arithmetik*

En la introducció a *Die Grundlagen der Arithmetik* (*1884*), després de constatar la dificultat en respondre a una pregunta aparentment tan senzilla com ¿Què és el número u?, el mateix Frege es pregunta:

> ¿No és vergonyós per a la ciència, no veure-hi clar en el seu objecte més important i aparentment més simple? [...] Si un concepte fonamental d'una gran ciència presenta dificultats, llavors és segurament una tasca ineludible, recercar-lo més acuradament per vèncer aquestes dificultats; especialment perquè difícilment tindrem èxit en aclarir completament els nombres negatius, racionals o complexos, mentre que la comprensió [*Einsicht*] dels fonaments de l'edifici sencer de l'aritmètica sigui deficient.[1]

Segons Frege, per assolir aquesta comprensió dels fonaments de l'aritmètica és necessari que les matemàtiques s'allunyin de la psicologia i reconeguin els seus lligams amb la lògica:

> Hom ha d'admetre que qualsevol recerca sobre la conclusivitat d'una demostració o la justificació d'una definició ha de pertànyer al domini de la lògica. Però aquestes preguntes no poden en absolut ser rebutjades per les matemàtiques, car només a través de la seva resposta es pot assolir la necessària certesa.[2]

La certesa de les matemàtiques depèn, doncs, de la conclusivitat de les proves i de la justificació de les definicions i aquestes són objecte d'estudi de la lògica. Respecte a les definicions, Frege assenyala que "el rigor d'una demostració resta il·lusori, encara que la cadena de deduccions no tingui cap llacuna, si les definicions només estan justificades "ad hoc" perquè hom no ensopegui amb una contradicció. D'aquesta manera, hom assoleix només una certesa experimental i, en el fons, ha d'estar preparat a trobar encara una contradicció que dugui a l'esfondrament de l'edifici".[3] Pel que fa a les demostracions, Frege es limita a recordar que "es troba en l'essència de les matemàtiques preferir una demostració,

1 *Frege 1959*, II.
2 *Ibid.*, IX.
3 *Ibid.*, IX.

quan ella sigui possible, a la confirmació mitjançant la inducció”.[1] Això és, totes les proposicions de l’aritmètica han de ser demostrades perquè “en matemàtiques una simple convicció moral, fonamentada en moltes aplicacions amb èxit, no és suficient”.[2] Ara bé, “la demostració no té només la finalitat d’elevar la veritat d’una proposició més enllà de tot dubte, sinó també d’atorgar-nos una comprensió de la dependència mútua de les veritats. Després que hom s’ha convençut que una roca és inamovible, en haver intentat moure-la debades, pot preguntar-se encara què la sosté tan fermament. Com més continuem aquesta recerca, més poques seran les veritats primitives a les quals hom redueixi tota la resta”.[3]

Les motivacions adduïdes fins ara per engegar la recerca dels fonaments de l’aritmètica són de tipus matemàtic. Però, assenyala Frege, “també m’han empès a recerques com aquestes motivacions filosòfiques. Les preguntes sobre el caràcter a priori o a posteriori, sintètic o analític de les veritats aritmètiques esperen aquí la seva resposta.[4] Com és ben sabut, Kant havia distingit a *Kritik der Reinen Vernunft* [*Crítica de la raó pura*] (*1781*) entre judicis *analítics* i judicis *sintètics* i havia considerat que tant els judicis de la geometria com els de l’aritmètica eren judicis *sintètics a priori*, el quals es fonamentaven respectivament en les intuïcions pures d’espai i temps.[5] De fet, tal com ha assenyalat A. Coffa a l’article “Kant, Bolzano and the Emergence of Logicism” (*1982*), les matemàtiques del segle XVIII semblaven confirmar la conclusió kantiana:

> Durant el segle divuit, les matemàtiques i, en particular, la seva branca més productiva, el càlcul, semblava implicar un recurs essencial a les intuïcions espai temporals. Newton havia presentat les funcions com referides al moviment de punts en el temps i l’aritmètica es descrivia rutinàriament com si suposés processos com ara

1 *Ibid.*, § 2, 2.
2 *Ibid.*, § 2, 2.
3 *Ibid.*, § 2, 2.
4 *Ibid.*, § 3, 3.
5 Segons Kant, els judicis analítics són aquells en què el concepte del predicat està inclòs (implícitament) en el concepte del subjecte i es basen en el *principi de no contradicció*. Per contra, en els judicis sintètics el concepte del predicat no està inclòs en el concepte del subjecte. Aquests judicis poden ser *a posteriori* i *a priori*. Els primer es basen en l’*experiència*, però en el cas dels segons es pregunta Kant, “¿En què em recolzo i què és el que fa possible la síntesi si he d’anar més enllà del concepte *A* per reconèixer que un altre concepte *B* està lligat a ell, donat que en aquest cas no tinc l’avantatge de poder apel·lar a l’experiència per veure-ho?” (*Kant 1911*, 21). D’acord amb Kant, la *síntesi* entre ambdós conceptes ha d’estar mediada per una tercera *representació*. Ara bé, com que les representacions només poden ser *conceptes* o *intuïcions* i dels conceptes només se’n poden derivar judicis analítics, Kant conclou que la representació en què es recolza l’enteniment per unir ambdós conceptes és una intuïció -*pura*, donat que es tracta de judicis *a priori*. Kant arriba així a la conclusió que els judicis sintètics a priori de la geometria i l’aritmètica es fonamenten respectivament en les intuïcions pures d’*espai* i *temps*.

el contar. Així, qualsevol que intentés mostrar que Kant estava equivocat en la seva conclusió segons la qual les matemàtiques havien de recórrer a la intuïció pura, havia de realitzar dues tasques considerables. La primera era determinar quin error hi havia en la deducció kantiana de la intuïció pura; la segona, mostrar que hom pot construir de fet les matemàtiques de manera que s'eviti la intuïció.[1]

Ambdues tasques foren engegades per Bolzano, l'interès del qual respecte de la reconstrucció de les matemàtiques se centrà en l'*anàlisi*, tal com van fer després també Cauchy, Weiertrasss, Cantor, Dedekind i el mateix Frege. Aquests tres últims intentaren també acomplir la segona tasca en el domini més bàsic de les matemàtiques, a saber, l'*aritmètica*. El rebuig de la intuïció en el raonament matemàtic esdevé així un tret característic dels matemàtics de l'època interessats en els aspectes fundacionals de la seva ciència, en la mesura que d'ell depèn precisament la possibilitat de construir les matemàtiques com una ciència autònoma. Així, per exemple, Dedekind explica que:

> En dir que l'aritmètica (àlgebra, anàlisi) és només una part de la lògica, vull dir que considero el concepte de nombre quelcom totalment independent de les representacions o les intuïcions d'espai i temps, quelcom que és, ans al contrari, un resultat immediat de les lleis pures del pensament (*ja citat*: *Cf. supra,* cap. I, § 1).

D'una altra banda, com ha assenyalat W. Demopoulos en l'article "Frege and the Rigorization of Analysis" abans esmentat:

> És suficient recordar que per la tradició matemàtica kantiana de l'època, les nostres intuïcions a priori són l'espai i el temps, i que l'estudi de l'espai i el temps pertany als dominis de la geometria, la cinemàtica i, potser, la mecànica. Se segueix llavors que la dependència d'un principi bàsic de l'aritmètica en alguna intuïció a priori implicaria que a l'aritmètica li manca l'autonomia i generalitat que associem amb ella.[2]

A *Grundlagen*, l'atac fregeà al punt de vista kantià segons el qual els judicis de l'aritmètica són sintètics comença amb la redefinició dels termes analític i sintètic. Per a Kant, aquesta distinció es referia al *contingut* dels judicis; per a Frege, en canvi, es refereix a

[1] *Demopoulos 1995*, 33.
[2] *Ibid.*, 75.

la *justificació* d'un judici o, millor dit, "a la raó última en què es fonamenta la justificació per a considerar-lo com a vertader".[1] D'aquesta manera, continua Frege:

> La qüestió s'allunya del domini de la psicologia i, si es tracta d'una veritat matemàtica, s'assigna a les matemàtiques. Es tracta llavors de trobar la demostració i remuntar-nos fins a les veritat primitives [de les quals aquella depèn]. Si, en aquest procés, hom topa només amb lleis lògiques generals, es té aleshores una veritat analítica [...] En canvi, quan no és possible dur a terme la demostració sense recórrer a veritats que no són de naturalesa general i lògica, sinó que es refereixen al domini d'una ciència particular, aleshores la veritat és sintètica. Perquè una veritat sigui a posteriori s'exigeix que la seva demostració es desenvolupi apel·lant a fets, és a dir, a veritats indemostrables i sense generalitat que comprenen afirmacions sobre objectes particulars. Si, per contra, es possible dur a terme totalment la demostració a partir de lleis generals, les quals no són susceptibles ni estan necessitades de demostració, llavors la veritat és a priori.[2]

En definitiva, tant de les motivacions filosòfiques com de les motivacions matemàtiques, se'n desprèn la mateixa exigència, a saber, que "les proposicions fonamentals de l'aritmètica, si això és possible d'alguna manera, es demostrin amb el major rigor; donat que només si s'evita qualsevol llacuna en la cadena de deduccions, hom pot dir amb seguretat, en quines veritats primitives es recolza la demostració i només quan hom les coneix, pot respondre aquella pregunta",[3] això és, la pregunta referent a la naturalesa de les proposicions aritmètiques. Ara bé, l'èmfasi fregeà en l'exigència de rigor i el fet que aquest es relacioni sempre amb la completesa o mancança de llacunes [*Lückenlosigkeit*] de les demostracions de les proposicions matemàtiques està íntimament relacionat amb el rebuig de la intuïció en el raonament matemàtic abans esmentat. Així, Frege assenyala que en les demostracions que es fan habitualment en matemàtiques:

> Hom avança a salts, i en això s'origina l'aparent i variada sobreabundància de les formes de deducció en les matemàtiques; com més grossos són els salts, més variades són les combinacions de simples inferències i axiomes de la intuïció que poden representar. Malgrat tot, sovint una transició com aquesta ens sembla

---

1 *Frege 1959*, § 3, 3.
2 *Ibid.*, § 3, 3-4.
3 *Ibid.*, § 4, 4-5.

immediatament evident, sense que els passos intermedis ens vinguin a la consciència; i, donat que aquests no responen a cap de les formes lògiques de deducció conegudes, estem preparats tot seguit a considerar aquesta evidència com una intuïció i la veritat deduïda com a sintètica [...] Per aquest camí no és possible separar netament els judicis sintètics fonamentats en la intuïció dels analítics. Ni aconseguirem tampoc reunir completament els axiomes de la intuïció amb seguretat, de manera que qualsevol demostració matemàtica pugui ser duta a terme només a partir d'aquests axiomes i mitjançant les lleis lògiques.[1]

Així doncs, es tracta d'"evitar tot salt en la cadena de deduccions" donat que només així podrem reunir un conjunt complet d'axiomes o veritats primitives i "delimitar un conjunt de regles d'inferència, que siguin suficients per a tos els casos i fàcils d'abraçar amb la vista".[2] D'aquesta manera es podrà desterrar el recurs a la intuïció en la justificació de les veritats aritmètiques i, conseqüentment, es podrà demostrar que poden provar-se amb mitjans exclusivament lògics, la qual cosa equival a demostrar, com ja s'ha dit, el seu caràcter analític.

Fins ara ens hem referit a les motivacions que haurien empès Frege a intentar demostrar que els judicis de l'aritmètica són analítics o, el que és el mateix, que l'aritmètica és una branca de la lògica. A partir d'ara, estudiarem l'estratègia seguida per Frege a *Grundlagen* per demostrar aquest resultat. Des d'un punt de vista estrictament formal, la tesi logicista requereix en essència que:

(*i*) els conceptes de l'aritmètica siguin definits en termes de conceptes lògics.
(*ii*) els teoremes de l'aritmètica siguin demostrats a partir dels axiomes i les regles de la lògica.

Tal com hem explicat abans, una vegada introduïda a *Begriffschrift* la relació ancestral i demostrades algunes de les seves propietats fonamentals, la tasca pendent a *Grundlagen* és la definició de la relació *successor* i del nombre 0, a partir de les quals Frege podrà definir la sèrie dels nombres naturals i demostrar-ne alguna de les seves propietats més importants, particularment la seva infinitud (*Cf. supra*, § 3). Ara bé, totes aquestes definicions i demostracions parteixen d'una definició bàsica, la definició següent:

1 *Ibid.*, § 90, 102-3.
2 *Ibid.*, § 91, 103.

(*a*) Un nombre és l'extensió d'un concepte. Més exactament, el nombre de *F*s és l'extensió del concepte de segon nivell "equinumèric amb el concepte *F*", on *F* és equinumèric amb *G* si, i només si, existeix una correspondència biunívoca entre els *Fs* i els *Gs*.

Aquesta és l'anomenada sovint *definició explícita* de nombre, a partir de la qual Frege aborda informalment a *Grundlagen* la tesi logicista, provant primer de tot l'anomenat *principi de Hume*:

(*b*) El nombre de *F*s és el mateix que el nombre de *G*s si, i només si, existeix una correspondència biunívoca entre els *F*s i els *G*s,

i esbossant a partir d'ell la demostració d'algunes propietats bàsiques de la sèrie dels nombres naturals que facin "probable" la conclusió que l'aritmètica és reductible a la lògica. Frege durà a terme la demostració pretesament definitiva de la tesi logicista a *Grundgesetze der Arithmetik*, obra en la qual exposarà un sistema lògic que el permetrà demostrar formalment, seguint els estàndards de rigor esmentats al començament d'aquesta secció, les lleis bàsiques de l'aritmètica (*Cf. supra*, §§ 8 i 10).[1] De totes maneres, les coses no són tan senzilles com podria semblar a primera vista, perquè abans de definir explícitament els nombres, Frege considera la possibilitat de definir-los contextualment a partir del principi de Hume. En l'argument que duu Frege a postular el principi de Hume com a *definició contextual* del concepte de nombre hi juga un paper fonamental l'anomenat *principi del context* i parteix de les dues tesis següents:

(*c*) Un enunciat numèric comprèn una asserció sobre un concepte. És a dir, tenir un cert nombre cardinal és una propietat d'un concepte;
(*d*) Els nombres són objectes.[2]

Frege acaba refusant tot intent de definir contextualment els nombres a partir del principi de Hume, però tant l'argument que duu Frege a la definició contextual de nombre,

[1] Aquest sistema lògic haurà de permetre, tal com hem vist en la secció anterior, la quantificació sobre conceptes i relacions i, per tant, serà equivalent essencialment a la lògica de segon ordre.
[2] Fixem-nos, doncs, que la concepció dels nombres com objectes és anterior a la seva definició com extensions de conceptes.

com les tesis (*b*), (*c*) i (*d*) són essencials per entendre perquè Frege adoptà com a definició del concepte de nombre la definició explícita (*a*) i, en definitiva, perquè abordà la demostració de la tesi logicista a partir d'aquesta definició. Per aquest motiu, en les pàgines següents explicarem l'argument que duu Frege a definir els nombres, primer contextualment a partir del principi de Hume, i després explícitament com extensions de conceptes. Per això explicarem primer de tot el *principi del context*, al qual Frege atorga una importància cabdal per a la deducció del concepte de nombre. Aquest principi, en efecte, és formulat per Frege en la Introducció a *Grundlagen* com un del tres principis fonamentals que haurien guiat la seva recerca, a saber:

> Separar rigorosament allò psicològic d'allò lògic, allò subjectiu d'allò objectiu.
>
> No preguntar mai pel significat de les paraules isoladament, sinó en el context d'un enunciat.
>
> No perdre mai de vista la distinció entre concepte i objecte.[1]

Segons Frege, el segon principi -*el principi del context*- implica el primer, en el sentit que si no s'observa aquest principi "hom es veu quasi bé obligat a prendre les imatges mentals o els actes de l'ànima individual com a significat de les paraules i, d'aquesta manera, a anar també contra el primer principi".[2] Així, per exemple, el principi del context permetrà a Frege postular allò significat per les *paraules-nombre* [*Zahlwörter*], això és, els nombres, com a *objectes autosubsistents* [*selbständige*] i *objectius* [*objektive*] i refutar la tesi kantiana segons la qual aquests objectes són intuïts espai-temporalment, tesi que, segons el parer de Frege, equival a afirmar que el significat de les paraules-nombre són imatges mentals o idees -i per a Frege aquestes són sempre subjectives. Quant al tercer principi, Frege assenyala que "és simplement una il·lusió, creure que hom pot fer un objecte d'un concepte, sense canviar-lo".[3] Aquest principi reflecteix, doncs, la distinció radical entre objectes i conceptes, que és a la base de l'ontologia de *Grundgesetze* i que nosaltres estudiarem amb detall a partir dels articles "Über Funktion und Begriff" i "Über Begriff und Gegenstand" de 1891 i 1892 respectivament (*Cf. infra*, §6). En el cas dels nombres naturals, aquest principi suposa que quan una paraula-nombre no figura com a subjecte, sinó com a predicat o atribut, "el seu

---

1 *Ibid.*, X.
2 *Ibid.*, X.
3 *Ibid.*, X.

significat canvia una mica". Malauradament, Frege no arriba a explicar en quin sentit es produeix aquest canvi de significat, però argumenta que tot enunciat en el qual una paraula-nombre figura com a predicat pot transformar-se en un enunciat en el qual figuri com a subjecte, el qual mostrarà la veritable naturalesa dels nombres com objectes autosubsistents.

Per explicar la tesi (*c*), a la qual Frege concedeix una importància fonamental en la gènesi del seu logicisme,[1] intentarem aclarir primer de tot què entén Frege per un *enunciat numèric* [*Zahlurteil*]. Encara que Frege no defineix explícitament què són els enunciats numèrics, podem deduir el que entén per enunciats d'aquesta mena a través dels diferents exemples que en dóna, com ara "Aquí hi ha quatre companyies" o "Aquí hi ha cinc cents homes" i també "Jupiter té quatre llunes" o "El nombre de llunes de Jupiter és quatre". En efecte, veiem a partir d'aquests exemples que els enunciats numèrics són els enunciats a través dels quals hom respon a les preguntes del tipus *¿Quants* ...? i que, per tant, permeten *contar* o *enumerar* els individus o objectes d'alguna mena. I és precisament per mor d'això que Frege concedeix tanta importància als enunciats numèrics per a la deducció del concepte de nombre. La idea bàsica de Frege és, en efecte, que la caracterització o definició de nombre natural ha de reflectir el fet que aquests nombres s'empren fonamentalment per contar. Ara bé, el principi del context mena a recercar el significat de les *paraules-nombre* no isoladament, sinó en el context d'un tipus d'enunciats "en el qual es destaqui la seva aplicació bàsica",[2] per la qual cosa els enunciats numèrics hauran de constituir el punt de partida de la recerca sobre el concepte de nombre. Així, per avançar cap el concepte de nombre, cal preguntar-se primer de tot: ¿què és el que s'afirma en un enunciat numèric? Segons Frege, quan hom afirma, per exemple, que hi ha cinc cents homes o quatre companyies, està afirmant quelcom dels conceptes "homes" o "companyies" i és precisament el fet que ambdós conceptes són diferents el que dóna lloc a dos enunciats diferents -encara que òbviament equivalents.[3] D'aquí, conclou Frege, que "un enunciat numèric comprèn una asserció sobre un concepte",[4] a saber, l'asserció que a aquest concepte li correspon un determinat nombre. En definitiva, tenir un cert nombre és una *propietat* dels conceptes o, el que és el mateix, un concepte de segon nivell -més endavant explicarem aquesta terminologia.

---

[1] *Cf. ibid.*, 18, n. 1.

[2] *Ibid.*, § 46, 49.

[3] En efecte, tal com assenyala Frege, "el que canvia aquí no són ni els individus, ni el tot, l'agregat d'aquells, sinó la meva terminologia. Però això només és el senyal que un concepte ha estat reemplaçat per un altre". (*Ibid.*, § 46, 49).

[4] *Ibid.*, § 46, 49.

Una vegada exposat l'argument que duu a la tesi (*c*), convé analitzar els pressupòsits sobre els quals se sustenta. Aquests són les dues tesis següents: *c'*) els conceptes tenen la capacitat de reunir en un tot o agregat determinats individus o objectes, a saber, aquells que cauen sota aquest concepte i *c''*) una *paraula-concepte* [*Begriffwort*] designa un concepte. La primera tesi suposa una ruptura radical amb l'epistemologia kantiana, car tal com assenyala Frege, "el poder de col·lecció dels conceptes supera àmpliament el poder d'unificació de l'apercepció sintètica. A través d'aquesta no seria possible reunir els habitants de l'imperi alemany en un tot; però hom si que pot subsumir-los sota el concepte "habitant de l'imperi alemany" i contar-los".[1] Com dirà Russell alguns anys més tard, és només gràcies als conceptes que podem introduir els conjunts infinits i aquí rau precisament la seva importància (*Cf. infra*, cap. VI, § 6). Per un altre costat, aquesta confiança cega en el poder irrestricte dels conceptes per definir un conjunt o classe, s'expressarà a *Grundgesetze* a través d'un axioma lògic -l'axioma V-, el qual donarà lloc a la famosa paradoxa de Russell i a l'anomenada a vegades "crisis de fonamentació de les matemàtiques" (*Cf. infra*, §11). La segona tesi avança la tesi segons la qual els conceptes són el *significat* o *denotació* [*Bedeutung*] de les paraules-concepte, la qual constitueix un dels pilars de la semàntica fregeana posterior a "Über Sinn und Bedeutung". Ara bé, és precisament aquesta tesi la que permet analitzar els enunciats numèrics com enunciats que fan referència a conceptes. Car aquesta última tesi és part d'una tesi més general segons la qual qualsevol enunciat en el qual figuri com a subjecte lògic una paraula-concepte és en realitat una asserció sobre el concepte *designat* -o, com direm també més endavant, *significat* o *denotat*- per aquella paraula. Així, per exemple, assenyala Frege, l'enunciat:

"totes les balenes són mamífers"

conté una *asserció* [*Aussage*] sobre un concepte, el concepte "balena". Ara bé, hom es podria preguntar si aquest enunciat fa referència a un concepte o, més aviat, a una classe o conjunt, això és, a la classe o conjunts dels individus o objectes que cauen sota aquest concepte. Aquesta última és la tesi sostinguda per Russell, de manera que, per aquest autor, tenir un cert nombre serà una propietat d'una classe i no d'un concepte -això requerirà evidentment reinterpretar les expressions com ara "totes les balenes" com a expressions que denoten classes. En qualsevol cas, tal com veurem més endavant, la necessitat de postular els nombres

---

1 *Ibid.*, § 48, 61.

com a objectes, durà a Frege a definir el nombres també com a classes, si bé com a classes de conceptes i no com a classes de classes *à la Russell* (*Cf. infra*, cap. VI, § 1).

Una vegada explicat el significat de la tesi (*c*), podem passar a discutir la tesi (*d*), segons la qual els nombres són objectes. Tal com hem vist abans, el tercer principi que ha de guiar la recerca sobre el concepte de nombre és "no perdre mai de vista la distinció entre concepte i objecte". Frege assenyala en diversos indrets que els nombres no són pas conceptes.[1] Però si els nombres no són conceptes, llavors, d'acord amb la distinció radical entre concepte i objecte que Frege derivarà més endavant del principi anterior, han de ser objectes. Frege esmenta a *Grundlagen* dos criteris per reconèixer un nom propi, això es, un nom d'objecte: l'ús de l'article definit i del singular, criteris que satisfan les paraules-nombre.[2] Però Frege dedueix que els nombres són objectes a partir de la tesi (*c*). Primer de tot, observa Frege, "precisament perquè forma part d'una asserció [sobre un concepte], cada nombre particular es mostra a si mateix com el que realment és, un objecte autosubsistent".[3] Podríem dir efectivament que l'atribució d'un nombre a un concepte, *i.e.* un enunciat numèric, és una funció l'argument de la qual és un nombre particular i, donat que només els objectes poden ser arguments d'una funció degut al seu caràcter complet o saturat,[4] els nombres són necessàriament objectes. A més, tal com explicarem més endavant, tot enunciat numèric és en realitat una igualtat i les igualtats són enunciats de reconeixement per als objectes, per la qual cosa el nombres no poden no ser sinó objectes.

Tornem ara a la deducció pròpiament dita del concepte de nombre. Donada la tesi (*c*), observa Frege, hom podria definir inductivament els nombres com segueix:

> El nombre 0 correspon a un concepte, si l'enunciat que a no cau sota aquest concepte és vàlid universalment, qualsevol que sigui a [...]
>
> El nombre $n + 1$ correspon a un concepte, si hi ha un objecte a que cau sota F de manera que el nombre n correspon al concepte "cau sota F i no és a".[5]

1 *Cf. ibid.*, §§ 12, 14 i 89.

2 Segons Frege: "quan hom diu "el nombre 1" indica amb l'article definit un objecte determinat i únic de la recerca científica. El nombre 1 és un nom propi i, com a tal, no admet el plural, com tampoc ho fan "Frederic el Gran" o "l'element químic or" (*Ibid.*, § 38, 49).

3 *Ibid.*, § 57, 68.

4 Com hem dit abans, aquest és un principi bàsic de la jerarquia de funcions de *Grundgesetze* (*Cf. supra*, p. 403, n. 1) i Frege el discutirà abastament a "Über Funktion und Begriff". En aquesta conferència, Frege distingirà, per primera vegada, entre *funció* (entre les quals s'inclouen els conceptes) i *objecte* en base a la seva naturalesa incompleta (insaturada) o completa (saturada) respectivament (*Cf. infra*, § 6). Tal com veurem més endavant, aquesta distinció constitueix una de les tesis bàsiques de la filosofia del llenguatge fregeana.

5 *Ibid.*, § 55, 67.

Ara bé, segons Frege, el problema d'aquesta definició és que no determina el significat de les paraules-nombre o, el que és el mateix, de les expressions del tipus "el nombre que correspon al concepte F", de manera que no permet demostrar cap igualtat numèrica i, per tant, cap enunciat numèric. En efecte, d'acord amb la tesi (*a*), les igualtats numèriques s'han d'interpretar com enunciats del tipus:

el nombre de Fs = el nombre de Gs (1),

o, en llenguatge simbòlic:

$$N[x : Fx] = N[x : Gx],$$

on F i G designen qualsevol concepte. Ara suposem, per exemple, que F i G denoten el mateix concepte o conceptes extensionalment equivalents i que a i b denoten respectivament el nombre de Fs i Gs. Llavors la definició inductiva anterior no permet demostrar que $a = b$, car no podem demostrar (1). El problema és que, segons Frege, a despit de falses aparences, la definició inductiva anterior no defineix els nombres, sinó simplement el sentit de les expressions del tipus

"el nombre a correspon a ...",

de manera que no sabem quin objecte designa aquest a. Respecte a això, és interessant destacar que l'argument fregeà pressuposa clarament que per definir un objecte és suficient fixar o determinar el significat de les paraules o expressions a través de les quals ens són donats aquests objectes car, tal com afirma Frege, "a fi de comptes, la definició d'un objecte no afirma, com a tal, res d'ell, sinó que fixa simplement el significat d'un símbol". Així, donat que d'acord amb la tesi (*a*) qualsevol paraula-nombre és equivalent a una expressió del tipus $N[x : Fx]$, n'hi hauria prou amb determinar el significat d'aquestes expressions per definir els nombres, la qual cosa tanmateix no aconseguia la definició inductiva ja estudiada. Ara bé, de fet, un nombre, *qua* objecte, podria no venir donat per una paraula nombre, sinó a través d'un *nom propi* qualsevol -això és, el nom d'un objecte qualsevol- i, per tant, qualsevol pretesa definició de nombre hauria de fixar també el significat d'aquestes paraules o, si més no, determinar si aquestes paraules designen o no un nombre. Doncs bé, això planteja una dificultat afegida, que mostra de forma encara més palesa la insuficiència de la definició inductiva de nombre i que Frege planteja en els termes següents:

> Mitjançant les nostres definicions no podem decidir mai, per posar un exemple extrem, si el nombre Juli Cèsar correspon a un objecte o si aquest conegut conquistador de la Gàl·lia és un nombre o no.[1]

En altres paraules, la definició inductiva de nombre no només no ens permet determinar la veritat o falsedat de les igualtats numèriques, això és, les igualtats del tipus

$$a = b, \tag{2}$$

on a i b són paraules-nombre, sinó tampoc enunciats del tipus

$$a = \text{Juli Cèsar}, \tag{3}$$

o, el que és el mateix, d'acord amb la tesi (a), dels enunciats del tipus

$$N[x : Fx] = \text{Juli Cèsar}. \tag{4}$$

El problema és sempre el mateix: la definició inductiva de nombre no fixa el concepte de nombre, és a dir, no determina quina mena d'objectes són els nombres. El que manca és, doncs, una definició de nombre que permeti distingir qualsevol nombre a través d'un enunciat numèric "com un objecte autosubsistent i reconeixible com el mateix" i, per tant, demostrar qualsevol igualtat numèrica. La insuficiència de la definició inductiva de nombre per determinar precisament aquest concepte s'anomena en la literatura contemporània *problema de Juli Cèsar* i, tal com veurem més endavant, aquest problema s'estén també a la definició contextual de nombre a través del principi de Hume -aquesta definició, en efecte, permet decidir la validesa de les igualtats del tipus (2) a través de (1), però no de (3) o (4).

Degut a les dificultats plantejades per la definició inductiva de nombre, Frege intentarà avançar cap a la definició de nombre apel·lant al principi del context, el qual el durà a definir contextualment els nombres a partir del principi de Hume. Com ja hem dit abans, en

---

1 *Ibid.*, § 56, 68.

efecte, aquest principi prescriu que, per descobrir el significat [*Bedeutung*] d'una paraula, cal preguntar-se pel significat d'aquesta paraula en el context d'un cert tipus d'enunciats en què hi figura aquesta paraula. Ara bé, segons Frege, per això cal definir el *sentit* [*Sinn*] d'aquests enunciats, això és, reproduir el contingut d'aquests enunciats en termes d'un altre enunciat, en el qual no hi apareguin ja aquelles paraules el significat de les quals volem descobrir. Això no presenta cap dificultat en el cas de les paraules o expressions que designen objectes perquè, tal com assenyala Frege, per a cada objecte "hi ha un tipus d'enunciat que ha de tenir sentit, a saber, els enunciats de reconeixement [*Wiedererkennungsätze*]",[1] això és, els enunciats que expressen el reconeixement que aquest objecte és el mateix, encara que sigui designat per paraules o expressions diferents.[2] Veiem, doncs, que els enunciats de reconeixement expressen sempre una igualtat [*Gleichung*] i, per tant, si aconseguim definir el sentit d'aquesta mena d'enunciats, tindrem un criteri general per decidir si els objectes designats per aquestes paraules són iguals, i podrem llavors assignar-los unívocament un nom, la qual cosa equival als ulls de Frege a definir-los. Aquestes definicions s'anomenen habitualment *definicions contextuals*. Un exemple clar de definició d'aquest tipus és el *principi de Hume*, a través del qual Frege defineix contextualment els nombres, per la qual cosa la deducció d'aquest principi a partir de la tesi (*c*) ens permetrà exemplificar el que acabem de dir respecte al principi del context.

Tal com hem assenyalat abans, els enunciats numèrics són aquells en els quals els nombres naturals s'empren en la seva aplicació bàsica. Ara bé, els enunciats numèrics expressen en realitat una *igualtat*, com ens ho mostra el fet que un enunciat com ara "Jupiter té quatre llunes" pot transformar-se en l'enunciat equivalent "El nombre de les llunes de Jupiter és 4", car aquí "és" té el sentit de "és igual" o "és el mateix que". No debades, assenyala Frege, "les igualtats són les formes més habituals en aritmètica".[3] Així doncs, els enunciats numèrics constitueixen enunciats de reconeixement per als nombres. Per tant, d'acord amb el principi del context, si definim el sentit d'una igualtat numèrica, la qual tindrà, segons la tesi (*c*), la següent forma:

"el nombre que correspon al concepte *F* és el mateix que el que correspon al concepte *G*",

1 *Ibid.*, § 62, 73.

2 Exemples d'enunciats de reconeixement no trivials són, per exemple, "l'estel del matí és idèntic a l'estel del vespre" o "2 + 3 = 5".

3 *Ibid.*, § 57, 69.

tindrem un criteri general per esbrinar si dos nombres són iguals i llavors podrem assignar-los una paraula-nombre.[1] Doncs bé, assenyala Frege, una definició d'aquesta mena és l'anomenat *principi de Hume*, el qual afirma que "el nombre que correspon al concepte F és el mateix que correspon al concepte G si, i només si, podem establir una correspondència biunívoca entre els elements que cauen sota F i els que cauen sota G",[2] això és:

$$N[x : Fx] = N[x : Gx] \equiv F \approx G.$$

En efecte, tal com assenyala Frege, en postular aquest principi "la nostra intenció és construir el contingut d'un judici que pugui ser considerat com una igualtat, cada costat de la qual sigui un nombre. D'aquesta manera [...] volem obtenir mitjançant el concepte ja conegut d'igualtat, allò que ha de ser considerat com igual",[3] això es, el concepte de nombre. Veiem, doncs, que Frege proposa definir contextualment els nombres a partir del principi de Hume. Tal com observa Frege, " això sembla ser certament un tipus molt poc comú de definició, al qual els lògics encara no han prestat prou atenció; però que no és inaudit, poden mostrar-ho alguns exemples".[4] Els exemples esmentats per Frege són tots ells extrets de la geometria i, en particular, Frege discuteix amb un cert detall la definició del concepte de direcció a partir de la relació de paral·lelisme. Aquesta discussió és interessant perquè, donada l'analogia traçada pel mateix Frege entre aquesta definició i la definició del concepte de nombre a partir del principi de Hume, mostra els problemes que planteja també la definició contextual de nombre i com, una vegada rebutjada aquesta definició, Frege arribarà finalment a la definició explícita de nombre. Frege, en efecte, comença suggerint la possibilitat de definir contextualment el concepte de direcció a partir del concepte de paral·lelisme de la següent manera:

> L'enunciat
>
> "la direcció de la recta *a* és igual a la direcció de la recta *b*"
>
> té el mateix significat que:
>
> "la recta *a* és paral·lela a la recta *b*".[5]

---

[1] *Cf. ibid.*, § 62, 73.

[2] *Cf. ibid.*, § 63, 73-74.

[3] *Ibid.*, § 63, 74.

[4] *Ibid.*, § 63, 74.

[5] *Cf. ibid.*, § 65, 76.

Ara bé, assenyala Frege, aquesta definició planteja dos problemes fonamentals. El primer és com saber si aquesta definició i, en general, les definicions d'aquesta mena, són adequades, això és, com saber si el *definiens* dóna realment el contingut de l'enunciat de reconeixement que figura com a *definiendum*. Doncs bé, segons Frege, "per això, s'ha de complir una condició, a saber, que en cada judici, pugui substituir-se el costat esquerra de la suposada, a títol experimental, igualtat, pel costat dret, sense afectar el seu valor de veritat".[1] Així doncs, el principi leibnizià de substituïbilitat dels idèntics dóna un criteri general per decidir l'adequació d'aquesta mena de definicions. En el cas que ens ocupa, el principi de substituïbilitat implica que en qualsevol judici o asserció sobre el concepte de direcció, s'ha de poder substituir per la direcció de qualsevol recta, la direcció de qualsevol altra recta paral·lela a la primera. Ara bé, això no planteja cap problema quant a la mateixa definició contextual de direcció, car la substitució ens duu a una identitat i, per tant, la validesa de la identitat quedarà justificada pel principi d'identitat; i tampoc pel que fa a la resta d'assercions sobre aquest concepte, car "totes les altres assercions sobre direccions haurien de ser primer de tot definides i, per aquestes definicions, podríem establir una regla, segons la qual la substituïbilitat de la direcció d'una recta per la d'una de les seves paral·leles quedés salvaguardada".[2] La segona dificultat que planteja la definició contextual de direcció és que aquesta definició no determina el concepte de direcció. En efecte, assenyala Frege:

> En l'enunciat
>
> "la direcció de *a* és igual a la direcció de *b*",
>
> la direcció de *a* figura com a objecte i la nostra definició [de direcció] ens forneix un mitjà per reconèixer aquest objecte, en cas que es presenti sota una altra forma com ara la direcció de *b*. Però aquest mitjà no és suficient per a tots els casos [...] la nostra definició [...] no diu res respecte a si l'enunciat
>
> "la direcció de *a* és igual a *q*"
>
> s'ha d'afirmar o negar, quan *q* no és dóna ja en la forma la "direcció de *b*". El que ens manca és el concepte de direcció; puix que si el tinguéssim podríem establir, si *q* no és una direcció, que el nostre enunciat ha de ser negat, i si *q* és una direcció, que la definició anterior decideixi si ha de ser negat o afirmat.[3]

---

[1] *Ibid.*, § 107, 116-17.
[2] *Ibid.*, § 65, 77.
[3] *Ibid.*, § 66, 77-8.

Naturalment, aquest problema s'aplica també *mutatis mutandi* al principi de Hume, la definició contextual de nombre. Aquest, en efecte, no permet decidir la validesa d'un enunciat com ara

"el nombre de *F*s és "...""",

quan " … " és, per exemple, un nom propi com ara "Juli Cèsar". Així doncs, les definicions contextuals de direcció i nombre sucumbeixen al mateix problema al qual sucumbia la definició inductiva de nombre, l'anomenat *problema de Juli Cèsar*. Precisament per això, Frege es veurà obligat a cercar a *Grundlagen* "un altra camí" que el dugui a la definició de nombre:

> Donat que no podem obtenir un concepte de recta delimitat prou clarament i tampoc, per les mateixes raons, un concepte semblant de nombre, provarem un altre camí. Si la recta *a* és paral·lela a la recta *b*, llavors l'extensió del concepte "recta paral·lela a la recta *a*" és igual a l'extensió del concepte "recta paral·lela a la recta *b*; i viceversa: si les extensions dels esmentats conceptes són iguals, llavors *a* és paral·lela a *b*. Provem, doncs, les següents definicions:
>
> "la direcció de la recta *a* és l'extensió del concepte "paral·lel a la recta *a*""
>
> [...]
>
> Si volem aplicar això al nostre cas, hem de posar, en comptes de rectes, conceptes [...], en comptes del paral·lelisme, [...] la possibilitat de fer correspondre unívocament [*eindeutig*] i recíproca [*beiderseits*] els objectes que cauen sota un concepte amb els que cauen sota l'altre. Quan aquesta possibilitat es presenti, per abreujar, anomenaré equinumèrics [*gleichzahlig*] als conceptes *F* i *G* [...] Conforme a això, defineixo:
>
> "el nombre que correspon al concepte *F* és l'extensió del concepte "equinumèric amb el concepte *F*"".[1]

Una vegada assolida la definició de nombre amb la qual acaba el paràgraf anterior, l'anomenada sovint definició *explícita* de nombre, Frege proposa mostrar la seva fertilitat [*fruchtbarkeit*] demostrant a partir d'ella "algunes propietats ben conegudes dels nombres".[2] Ara bé, "això és necessari formular que s'entén per "equinumericitat" d'una forma encara

[1] *Ibid.*, § 68, 79.

[2] *Ibid.*, § 70, 81.

més precisa. Prèviament l'havíem definida en termes d'una correspondència biunívoca, però ara s'ha d'exposar com entenem aquesta última expressió, car hom podria suposar fàcilment que hi ha en ella quelcom intuïtiu".[1] Aquesta definició de correspondència biunívoca es dóna en dos passos. Primer de tot, Frege explica que "si cada objecte que cau sota *F* està en la relació ϕ amb un objecte que cau sota *G*, i si per cada objecte que cau sota *G* hi ha un objecte en la relació ϕ que cau sota *F*, llavors els objectes que cauen sota *F* i *G* estan coordinats els uns amb els altres per la relació ϕ".[2] Això és, ϕ és una *correspondència* entre els *F*s els *G*s si, i només si,

$$\forall d[Fd \rightarrow \exists a(Ga \wedge \phi da)] \wedge \forall d[Gd \rightarrow \exists a(Fa \wedge \phi ad].$$

En segon lloc, assenyala Frege, una correspondència ϕ és *biunívoca* si els dos enunciats següents són alhora vàlids:

> 1. Si *d* està en la relació ϕ amb *a*, i *d* està en la relació ϕ amb *e*, aleshores es té en general, qualssevol que siguin *d*, *a* i *e*, que *a* és el mateix que *b*.
> 2. Si *d* està en la relació ϕ amb *a*, i si *b* està en la relació ϕ amb a, aleshores es té en general que, qualssevol que sigui *d*, *b* i *a*, *d* és el mateix que *b*.[3]

Això és, una correspondència ϕ és biunívoca si, i només si,

$$\forall d \forall a \forall e(\phi da \wedge \phi de \rightarrow a = e) \wedge \forall d \forall b \forall a(\phi da \wedge \phi ba \rightarrow d = b)$$

Veiem, doncs, que la definició de correspondència biunívoca és expressable en termes estrictament lògics, com també ho era la definició de l'ancestral d'una relació a *Begriffschrift* (*Cf. supra*, § 3).[4] De fet, aquestes definicions són un bon exemple de la importància que té pel logicisme el desenvolupament d'un llenguatge lògic en el qual es puguin definir les relacions més habituals en matemàtiques i demostrar les seves propietats. Frege reconeix aquest fet en assenyalar, tot emprant el llenguatge filosòfic més característic de *Grundlagen* i una vegada que ha demostrat que les relacions constitueixen un tipus específic de concepte,

[1] *Ibid.*, § 70, 81.
[2] *Ibid.*, § 71, 83.
[3] *Ibid.*, § 72, 84.
[4] Notem però, que la primera definició empra el llenguatge de la lògica de primer ordre amb identitat, mentre que la segona emprava el llenguatge de segon ordre.

que "la noció de relació pertany, com la noció simple [de concepte] a la lògica pura, la qual no pren en consideració el contingut particular de la relació, sinó només la forma lògica. I el que es pugui enunciar d'aquesta serà veritat analíticament i conegut a priori".[1] D'acord amb les definicions anteriors, ara ja podem reformular la definició d'*equinumerositat* en termes de l'existència d'una correspondència biunívoca i, a partir d'ella, el *principi de Hume*, en el termes següents:

$$N[x : Fx] = N[x : Gx] \equiv \exists\phi(\forall d[Fd \rightarrow \exists a(Ga \wedge \phi da)] \wedge \forall d[Gd \rightarrow \exists a(Fa \wedge \phi ad] \wedge$$
$$\forall d \forall a \forall e[\phi da \wedge \phi de \rightarrow a = e] \wedge \forall d \forall b \forall a[\phi da \wedge \phi ba \rightarrow d = b])$$

Una vegada reformulat en termes estrictament lògics el principi de Hume, Frege defineix l'expressió "n és un nombre" com equivalent a l'expressió: "existeix un concepte tal que n és el nombre que li correspon",[2] *i.e.* $Zn \leftrightarrow \exists F(N[x : Fx] = n)$ i procedeix després a demostrar el principi de Hume a partir de la definició explícita de nombre. De fet, Frege només demostra un sentit de l'equivalència, a saber, d'esquerra a dreta. Per això s'ha de demostrar, segons Frege, que si F és equinumèric amb G (abreujat: F equin G), llavors:

1. Si H equin F, aleshores H equin G
2. Si H equin G, aleshores H equin F.[3]

Ara bé, per això només cal demostrar que si ψ, ϕ són dues correspondències biunívoques tals que $H\psi F\phi G$, llavors la composició de ψ i ϕ és una correspondència biunívoca entre H i G, la qual cosa és pura rutina -(2) es demostra de forma anàloga.[4] L'altre sentit de l'equivalència també es demostra fàcilment car, donat que F equin F, F és en l'extensió del concepte "equinumèric amb F" i com que, per hipòtesi, aquesta extensió és igual a la del concepte "equinumèric amb G", llavors F pertany també a l'extensió d'aquest últim concepte. Veiem, doncs, que en la demostració anterior no només es fa un ús explícit de les extensions, sinó que també s'empra implícitament un principi o regla que permet passar de l'equivalència entre dos conceptes a la igualtat entre llurs extensions i, per tant, permet afirmar que els conceptes equivalents entre si pertanyen cada un d'ells a la classe

1 *Ibid.*, § 70, 83.
2 *Ibid.*, § 72, 85.
3 *Cf. ibid.*, § 73, 85-86.
4 *Cf. ibid.*, § 73, 86.

d'equivalència de l'altra concepte. És només gràcies a aquesta regla que Frege pot considerar que la demostració de (1) i (2) equival a la demostració que l'extensió dels conceptes "equinumèric amb *F*" i "equinumèric amb *G*" són iguals o que ha permès deduir que *F* pertany a l'extensió del concepte "equinumèric amb *F*" a partir del fet que *F* equin *F*. Cal remarcar, doncs, que una regla com l'anterior -la formalització de la qual esdevindrà l'axioma V de *Grundgesetze*- és absolutament necessària per a la demostració del principi de Hume a partir de la definició explícita de nombre i, per tant, semblaria que d'ella depèn, en darrer terme, la possibilitat de demostrar amb mitjans exclusivament lògics les "propietats ben conegudes del nombres" abans esmentades, entre les quals s'inclouen els axiomes de Peano-Dedekind per a l'aritmètica. Però, tal com veurem immediatament, Frege demostrarà a *Grundlagen* aquestes propietats exclusivament a partir del principi de Hume i sense recórrer de nou a les extensions, per la qual cosa la inconsistència de l'axioma V de *Grundgesetze* no afecta a les demostracions que es duen a terme a *Grundlagen*, però si a la pretensió fregeana que aquesta demostració sigui una demostració de la seva tesi logicista donat que el principi de Hume no és òbviament un axioma lògic.

Abans de procedir a les demostracions de les "propietats ben conegudes del nombres", Frege defineix els *nombres individuals* [*einzelne Zahlen*] a partir de la definició explícita de nombre ja estudiada. Frege defineix primer el nombre 0 com "el nombre que correspon al concepte "no igual a si mateix",[1] *i.e.* $0 = N[x : x \neq x]$. Frege demostra llavors que a qualsevol concepte sota el qual no hi cau cap objecte li correspon el nombre 0 i viceversa,[2] *i.e.*$NF = 0 \leftrightarrow \forall x \neg Fx$, la qual cosa justifica l'adequació de la definició anterior. Frege defineix a continuació la relació "*n* segueix immediatament a *m* en la sèrie dels nombres naturals", *i.e.* la relació *successor*, *Snm*, de la manera següent: "hi ha un concepte *F* i un objecte *x* que cau sota ell, tal que el nombre que correspon al concepte *F* és *n* i el nombre que correspon al concepte "cau sota *F* però no és igual a *x*" és *m*".[3] En símbols:

$$\exists F \exists x \exists G(Fx \land N[x : Fx] = n \land \forall y(Gy \leftrightarrow Fy \land y \neq x) \land N[y : Gy] = m)$$

(Frege empra també sovint l'expressió "*m* precedeix immediatament a *n* en la sèrie dels nombres naturals" per designar aquesta mateixa relació, per la qual cosa nosaltres emprarem també la notació *Pmn*). D'aquí se segueix immediatament que 0 no segueix

1 *Ibid.*, § 74, 87.
2 *Cf. ibid.*, § 75, 88-89.
3 *Ibid.*, § 76, 89.

immediatament a cap nombre en la sèrie dels nombres naturals, *i.e.* $\neg S0a$, però Frege no es fa ressò d'aquest fet. Frege defineix a continuació el nombre 1 com "el nombre que correspon al concepte "igual amb 0",[1] *i.e.* $1 = N[x : x = 0]$, i demostra llavors fàcilment que 1 segueix immediatament a 0 a la sèrie dels nombres naturals, *i.e.* $S10$, la qual cosa justifica la definició anterior. Una vegada introduïdes les definicions anteriors, Frege exposa una sèrie de proposicions que són fàcilment demostrables a partir d'elles. Aquestes proposicions es demostren formalment a *Grundgesetze* i juguen un paper important a la demostracions de les "lleis bàsiques de l'aritmètica" dutes a terme en aquella obra, per la qual cosa les exposarem formalment a continuació, tot indicant entre parèntesi els teoremes corresponents de *Grundgesetze* i el paràgraf d'aquesta obra on es demostren:

1. $Sa0 \to a = 1$(teorema 114, § 105)

2. $N[x : Fx] = 1 \to \exists xFx$ (teorema 113, § 103)

3. $N[x : Fx] = 1 \to (Fx \land Fy \to x = y)$ (teorema 114, § 105)

4. $\exists xFx \land \forall x\forall y(Fx \land Fy \to x = y) \to N[x : Fx] = 1$ (teorema 122, § 107)

5. $\forall a\forall b\forall c\forall d(Sac \land Sbd \to (a = b \leftrightarrow c = d))$ (teorema 90, § 95)

6. $\forall n(Zn \land n \neq 0 \to \exists m(Zm \land Snm))$ (teorema 107, § 101).[2]

Notem que Frege ha definit fins aquí *nombre*, *successor*, 0 i 1, ha demostrat que *successor* és bijectiva (5) i que tot nombre distint de zero és un successor (6), però Frege encara no ha definit *nombre natural* ni ha demostrat tampoc l'important teorema que tot nombre natural té un successor, això és, que "a cada nombre *n* el segueix immediatament un nombre en la sèrie dels nombres naturals".[3] La idea bàsica de Frege per demostrar aquest teorema és agafar com aquest nombre el nombre que correspon al concepte "pertany a la sèrie de nombres naturals que acaba amb *n*" i demostrar que aquest nombre segueix immediatament a *n* en la sèrie dels nombres naturals. Evidentment, un nombre pertany a

1 *Ibid.*, § 77, 90.
2 *Cf. ibid.*, § 78, 91-92.
3 *Ibid.*, § 79, 92.

l'extensió del concepte anterior si és un ancestral feble de n en la sèrie dels nombres naturals i, per tant, per definir precisament aquest concepte a Frege li caldrà definir primer de tot la relació ancestral. Frege defineix l'*ancestral* de ϕ, ϕ^*, això és, "y segueix a x a la sèrie ϕ" o "x precedeix a y en la sèrie ϕ", en termes completament anàlegs als de *Begriffschrift*.[1] En símbols:

$$\forall F(\forall a(\phi xa \rightarrow Fa) \wedge \forall d \forall a(Fd \wedge \phi da \rightarrow Fa) \rightarrow Fy).$$

Frege comenta que "només a través d'aquesta definició de seguir en una sèrie, és possible reduir el tipus d'inferència de n a $n+1$, que sembla ser característic de les matemàtiques, a les lleis generals de la lògica".[2] Ja havíem vist, en efecte, que Frege deduïa a *Begriffschrift* el *principi d'inducció generalitzada* a partir d'aquesta definició. Com ja sabem, Frege havia definit a *Begriffschrift* l'*ancestral feble* d'una relació ϕ, posant:

$$\phi^*_= xy \equiv \phi^* xy \vee x = y,$$

que expressa la relació "y segueix a x a la sèrie ϕ o és igual a x", que Frege llegia indistintament com "y pertany a la sèrie ϕ que comença amb x" o "x pertany a la sèrie ϕ que acaba amb y". Per tant, tal com afirma Frege en el paràgraf 81 de *Grundlagen*, si prenem com a relació ϕ aquella determinada per l'enunciat:

"*n* segueix immediatament a *m* en la sèrie dels nombres naturals",

direm llavors "sèrie dels nombres naturals" en lloc de "sèrie ϕ"" i tindrem que "*a* pertany a la sèrie dels nombres naturals que acaben amb *n*, si *n* o bé segueix a *a* en la sèrie dels nombres naturals o és igual a *a*".[3] Veiem, doncs, que, en definitiva, el que fa Frege és definir el concepte

"*x* pertany a la sèrie dels nombres naturals que acaba amb *n*",

a través de l'enunciat:

---

1 *Ibid.*, § 79, 92.
2 *Ibid.*, § 82, 93.
3 *Ibid.*, § 81, 94.

"n segueix a x o és igual a x a la sèrie dels nombres naturals",

o, equivalentment:

"x precedeix a n o és igual a x a la sèrie dels nombres naturals",

i, per tant, a través de l'ancestral feble de la relació successor, *i.e.* $S^{*}_{=}nx$ -o equivalentment, de l'ancestral feble de la seva conversa, *i.e.* $P^{*}_{=}xn$. Finalment, una vegada definit precisament el concepte "x pertany a la sèrie dels nombres naturals que acaba amb n", Frege procedirà a la demostració que el nombre que li correspon segueix immediatament a n. Frege esbossa informalment aquesta demostració en els paràgrafs 82 i 83 de *Grundlagen*, els trets bàsics de la qual reproduïm a continuació, emprant quan sigui possible els símbols lògics que hem anat introduint fins ara.

En el paràgraf 82, Frege assenyala que s'ha de mostrar que -sota una condició que encara ha d'especificar- que:

$$N[x : x \leq n]Sn.^{1} \qquad 0$$

Aquesta condició, com veurem en l'anàlisi del paràgraf següent de *Grundlagen*, és que n sigui un nombre *finit* o *natural*, la qual cosa denotarem per Fin$n$. Per tant, el que en realitat s'ha de demostrar és:

$$\mathrm{Fin}n \rightarrow N[x : x \leq n]Sn. \qquad 0'$$

D'acord amb Frege, per això s'ha de demostrar primer que:

$$aSd \wedge N[x : x \leq d]Sd \rightarrow N[x : x \leq a]Sa, \qquad 1$$

i després que:

$$N[x : x \leq 0]S0. \qquad 2$$

[1] *Cf. ibid.*, § 81, 94. Per facilitar la lectura, a partir d'ara escriurem $x \leq n$ en comptes de $S^{*}_{=}nx$ o $P^{*}_{=}xn$ i nSx en comptes de Snx.

Finalment, s'ha de deduir a partir de 1 i 2 que "això val també per n quan n pertany a la sèrie dels nombres naturals que comença amb 0",[1] aplicant la definició de "y segueix a x a la sèrie dels nombres naturals" donada prèviament.[2] En concret, segons Frege, s'ha de substituir en la definició anterior el concepte F per l'enunciat (1) i les lletres d i a per 0 i n respectivament.

En el paràgraf 83, Frege assenyala que per demostrar la proposició (1) del paràgraf anterior s'ha de demostrar que

$$a = N[x : x \leq a \wedge x \neq a],$$

i per això, s'ha de demostrar que

$$\forall x(x \leq a \wedge x \neq a \leftrightarrow x \leq d)$$

(d'on se segueix evidentment que $a = N[x : x \leq d]$). Ara bé, per això s'ha de demostrar a partir de la definició d'*ancestral* que:

$$\mathrm{Fin}a \to \neg a < a.$$

Això és, segons Frege, el que obliga a afegir a $N[x : x \leq n]Sn$ l'antecedent $\mathrm{Fin}n$ en l'enunciat del seu teorema d'infinit.[3] Així doncs, Frege definirà al final del paràgraf: "n és un nombre finit" si, i només si, "n pertany a la sèrie dels nombres naturals que comença amb 0",[4] *i.e.* $\mathrm{Fin}n \equiv P^{*}_{=}(0, n)$.[5]

Una vegada esbossada la demostració de la infinitud de la sèrie dels nombres naturals, que Frege demostrarà formalment a *Grundgesetze* seguint pràcticament al peu de la lletra l'esbós traçat a *Grundlagen*, Frege enceta una nova secció dedicada als nombres infinits, el

---

1 *Ibid.*, § 82, 94-95.

2 Com ja sabem, la definició anterior és una instància de la definició d'*ancestral*, la qual s'obté substituint la relació arbitrària ϕ que figura en aquesta definició per la relació *successor* -o predecessor.

3 *Ibid.*, § 83, 95-96.

4 *Ibid.*, § 83, 96.

5 Hom pot trobar els detalls de la demostració de la infinitud de la sèrie dels nombres naturals duta a terme per Frege en els paràgrafs 82 i 82 de *Grundlagen* en l'article de Boolos "The Consistency of Frege's *Foundations of Arithmetic*" (*1987*). Tant en aquest article com en l'apèndix de l'article del mateix autor "The standard of equality of numbers" (*1990)* (Apèndix: Arithmetic in the *Foundations*) hi ha una reconstrucció completa de totes les definicions i demostracions esbossades per Frege a *Grundlagen* -inclosa la de la infinitud dels naturals.

més destacable de la qual és el reconeixement del nostre autor a la tasca duta a terme per Cantor en aquesta direcció,[1] tot i la crítica adreçada a la practica definicional d'aquest autor a l'hora d'introduir els diferents tipus de nombres (§ 86). *Die Grundlagen der Arithmetik* acaba amb una llarga conclusió en la qual Frege expressa primerament la seva esperança en "haver fet [més] plausible a través d'aquest escrit que les lleis de l'aritmètica són judicis analítics i conseqüentment a priori",[2] de manera que "l'aritmètica esdevé una lògica més desenvolupada i cada proposició aritmètica una llei lògica, si bé derivada".[3] Fins quin punt això és així? Tal com hem vist en les pàgines anteriors, l'estratègia de Frege a *Grundlagen* consisteix a demostrar el principi de Hume a partir de la definició explícita de nombre (§73) i a derivar després a partir d'aquest principi "algunes propietats ben conegudes dels nombres". De fet, tal com hem vist, a *Grundlagen* Frege defineix 0, *successor* i *nombre natural* o *finit* i demostra els següents axiomes de Peano-Dedekind per a l'aritmètica:

(1) 0 és un nombre natural,
(2) 0 no és el successor de cap nombre
(3) si *n* i *m* són dos nombres naturals diferents, llavors els seus successors respectius també ho són.
(4) Si (*a*) 0 cau sota *F* i (*b*) per qualssevol nombres naturals *n*, *m*, si *n* cau sota *F* implica que *m* cau sota *F*, llavors tot nombre natural cau sota *F*
(5) Tot nombre natural té un successor.[4]

En realitat, Frege no demostra a *Grundlagen* (2) però, com ja hem dit abans, aquest axioma se segueix immediatament de la seva definició de l'ancestral. Pel que fa al principi d'inducció (4), el qual és emprat per Frege en la demostració de l'axioma de l'infinit (5), ja havia estat demostrat a *Begriffschrift* i, per tant, a *Grundlagen* Frege només fa referència a la possibilitat de demostrar-lo a partir de la definició d'*ancestral* donada en ambdues obres. Tal com explicarem més endavant, la demostració de Frege dels axiomes de Peano-Dedekind a

---

1 *Ibid.*, § 85, 97-98.
2 *Ibid.*, § 87, 99.
3 *Ibid.*, § 87, 99.
4 Aquesta formulació informal dels axiomes de Peano-Dedekind és la més habitual avui en dia amb petites variants. Tal com el lector haurà pogut observar, no coincideix exactament amb la formulació original dels axiomes de l'aritmètica, que Peano va realitzar a partir de la definició de sistema simplement infinit de Dedekind (*Cf. supra*, cap. IV, § 9). Les diferencies fonamentals amb la formulació de Peano són la substitució del nombre 1 per 0 i del postulat (2) de Peano per l'axioma de l'infinit, a partir del qual se segueix immediatament aquell postulat.

Grundgesetze segueix, en la seva major part, l'esbós que Frege presenta de manera informal a *Grundlagen* (*Cf. infra*, § 10). Aquesta derivabilitat dels axiomes de l'aritmètica a partir de la lògica emprada en la tercera part de *Begriffschrift* (la lògica de segon ordre) i el *principi de Hume* és coneguda avui en dia, seguint un suggeriment fet al respecte per Boolos, com el *teorema de Frege* i és, sens dubte, una de les fites més importants assolides per Frege en les obres abans esmentades.[1] En particular, tal com hem vist, Frege va aconseguir demostrar a *Grundlagen* l'existència d'un sistema infinit i, per tant, va aconseguir un èxit notable allí on Dedekind va fracassar. Però, tal com dèiem abans, Frege demostra a *Grundlagen* el principi de Hume a partir de la definició explícita de nombre i per això necessita una regla la formalització de la qual esdevé l'axioma V de *Grundgesetze*. Aquest axioma és inconsistent, per la qual cosa podria semblar que les demostracions de *Grundlagen* estan viciades d'origen i descansen en un sistema lògic inconsistent com el de *Grundgesetze*. Ara bé, tal com hem vist, Frege demostra a *Grundlagen* aquestes propietats exclusivament a partir del principi de Hume i la lògica de *Begriffschrift*, sense recórrer de nou a les extensions, per la qual cosa la inconsistència de l'axioma V de *Grundgesetze* no afecta necessàriament a les demostracions que es duen a terme a *Grundlagen.* Ara bé, és *Grundlagen* consistent? En altres paraules, és consistent la lògica de segon ordre -inclosos els axiomes de comprehensió abans esmentats- plus el principi de Hume? La resposta és afirmativa, tal com ha demostrat Boolos a l'article "The Consistency of Frege's *Foundations of Arithmetic*" (*1987*).[2] Podríem considerar, doncs, la demostració del *teorema de Frege* una demostració de que l'aritmètica és una part de la lògica? Està clar, primer de tot, que Frege no ho veié mai així, com ho demostra el fet que, un cop enfrontat a la paradoxa de Russell que demostrava la inconsistència del sistema lògic de l'axioma V de *Grundgesetze*, no va apel·lar mai a la derivació dels axiomes de Peano-Dedekind a partir del principi de Hume duta a terme a *Grundlagen* com una demostració de la seva tesi logicista. De fet, tal com hem vist a les pàgines anterior, el mateix Frege no considerava que el principi de Hume oferís una definició satisfactòria del concepte de nombre i, per això, posà la definició explícita de nombre. De fet, el principi de Hume no permet respondre a la pregunta *¿què* és un nombre?, si més no en el sentit que és incapaç d'explicitar una definició dels nombres *qua* objectes lògics. Aquesta no és una qüestió banal,

[1] Una altra qüestió és que el fet que nosaltres considerem com una de les fites més importants assolides per Frege a *Grundlagen* o *Grundgesetze* la demostració del teorema de Hume, no implica necessàriament que Frege ho valorés així, ni molt menys que aquest fos l'objectiu principal de Frege en aquestes obres, en el sentit que veiés la demostració dels axiomes de Peano-Dedekind com la demostració definitiva de la seva tesi logicista en el domini de l'aritmètica (*Cf. infra*, § 10).

[2] *Cf. Demopoulos 1995*, 216-17.

perquè una de les objeccions fonamentals que es poden adreçar a la demostració de la tesi logicista a *Grundlagen* és precisament que la noció "el nombre que pertany al concepte … " que figura en el principi de Hume no està definida i, per tant, que el teorema de Frege no demostra en absolut que l'aritmètica és una part de la lògica. D'una altra banda, com ja sabem, el principi de Hume esta subjecte al *problema de Juli Cèsar*, el qual mostra que aquest principi, considerat com a únic principi a través del qual es donen les condicions d'identitat dels nombres, no descriu les condicions a través de les quals un objecte arbitrari, posem per cas Juli Cèsar, pot ser identificat o no amb un nombre determinat.

6. Funció i objecte

En la conferència "Funktion und Begriff" ["Funció i concepte"] (*1891*), Frege precisarà i ampliarà la noció de *funció*, introduint els *objectes* en general -en els quals s'inclouen ara els valors de veritat- com a possibles arguments i valors d'una funció. Així es definirà el *concepte* com una funció el valor de la qual és sempre un valor de veritat i es reinterpretaran els signes més importants de *Begriffschrift* com a signes funcionals. De fet, Frege introduirà en aquesta conferència l'ontologia a partir de la qual bastirà després la lògica de *Grundgesetze der Arithmetik* i esbossarà ja la jerarquia de funcions i conceptes, que constitueix potser la novetat més important d'aquesta obra.[1]

Què és una funció? D'acord amb Frege, aquesta pregunta s'ha respost habitualment afirmant que per una funció s'entén una expressió del càlcul -una fórmula- que conté x. Així, per exemple, $2x^3 + x$ serà una funció de x. Però aquesta definició és incorrecta perquè "una simple expressió, que pot ser la forma per a un contingut, no pot ser l'essència de la cosa, sinó que només ho pot ser el contingut mateix".[2] Segons això, la funció -i l'argument- ja no s'entendran com a part d'una expressió lingüística, sinó com quelcom pertanyent al seu contingut o significat, la qual cosa durà també, com veurem més endavant, a una nova interpretació de la quantificació. D'una altra banda, si observem, per exemple, les expressions

---

1 Per remarcar la similitud entre les idees bàsiques i la presentació de les nocions de *funció* i *objecte* a "Funktion und Begriff" i *Grundgesetze der Arithmetik*, en les notes a peu de pàgina posarem també entre parèntesi, quan sigui possible, les referències a aquesta darrer obra.

2 *Frege 1967*, 126.

$$“2.1^3 + 1”$$
$$“2.2^3 + 2”$$
$$“2.4^3 + 4”,$$

reconeixerem, sens dubte, la mateixa funció que reconeixíem en l'expressió “$2x^3 + x$”. De totes maneres, no podem confondre la funció que estem cercant amb el significat de qualsevol de les expressions anteriors, perquè llavors la funció seria un nombre -el nombre 3, 18 o 132 respectivament. Amb això veiem, segons Frege, “que la veritable essència de la funció rau en allò comú a cada expressió: Això és, en allò que és present a

$$“2x^3 + x”$$

llevat de la x, la qual cosa potser podríem escriure

$$“2.(\ )^3 + (\ )””.$$[1]

Amb això, continua Frege, “m'interessa mostrar que l'argument no pertany a la funció, sinó que forma amb la funció un tot complet; donat que la funció per si sola és incompleta, l'anomeno necessitada de complementació o no saturada [*ungesättigt*]”.[2] Així doncs, encara que parlem, per exemple, de $2x^3 + x$ com una funció, no hem de considerar el signe x com pertanyent a la funció, sinó com un signe que indica els llocs buits de la funció que poden ser omplerts per un argument. Precisament, “allò que resulta de completar la funció amb l'argument serà *el valor de la funció per aquest argument*. Així, per exemple, 3 és el valor de la funció $2x^2 + x$ per l'argument 1, perquè $2.1^2 + 1 = 3$”.[3]

D'acord amb Frege, quan dues funcions tinguin exactament els mateixos valors pels mateixos arguments -com és el cas, per exemple, de les funcions $x^2 - 4x$ i $x(x-4)$- direm que ambdues funcions tenen el mateix *curs de valors* [*Werthverlauf*]. Per designar el curs de valor d'una funció, assenyala Frege, “substitueixo el signe de l'argument en l'expressió de la funció per un signe de vocal grega, ho tanco tot entre parèntesis i l'hi poso al davant la mateixa lletra grega amb un *Spiritus lenis*. Segons això, per exemple,

---

1 *Ibid.*, 128.

2 *Ibid.*, 128 (*Cf. Frege 1962 1*, § 1, 5-6).

3 *Ibid.*, 129 (*Cf. ibid.*, § 1, 6).

$$\grave{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$$

és el curs de valor de la funció $x^2 - 4x$, i

$$\grave{\alpha}\,(\alpha.[\alpha - 4])$$

el curs de valor de la funció $x(x - 4)$, de manera que tenim en l'expressió

$$\grave{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \grave{\alpha}\,(\alpha.[\alpha - 4])$$

que el primer curs de valor és el mateix que el segon".[1] Així doncs, podríem identificar el curs de valor d'una funció amb la classe o conjunt dels parells ordenats $\langle x, y\rangle$ tals que y és el valor d'aquesta funció per l'argument x -Frege posa, fins i tot, l'exemple de la geometria analítica, on es representa el curs de valor d'una funció com un conjunt de punts -parells ordenats en el pla cartesià- que descriuen usualment una corba. Ara bé, tal com comprovarem en estudiar *Grundgesetze der Arithmetik*, l'operador d'abstracció $\grave{\varepsilon}$ (... ε ...), que transforma una funció (... x ...) en un curs de valor, és una noció primitiva i, com a tal, no es defineix en termes de la teoria de conjunts o classes, sinó que són els conjunts o classes els que resulten de l'aplicació d'aquest operador i són conseqüentment un tipus especial de curs de valor -a saber, les extensions.

Tornant a l'anàlisi del concepte de funció, Frege assenyala que el significat d'aquesta paraula s'ha ampliat en dues direccions: d'una banda, pel que fa als càlculs que intervenen en la construcció de la funció, a les operacions d'addició, multiplicació, potenciació i les respectives operacions inverses, s'hi han afegit les distintes classes d'avaluacions de límits; d'una altra, pel que fa als arguments i valors de les funcions, s'han introduït també els nombres complexos. El mateix Frege ampliarà el concepte de funció seguint ambdues direccions. D'una banda s'introduiran els signes =, >, <, en la construcció de les funcions, de manera que es pugui parlar, per exemple, de funcions com ara $x^2 = 1, x < 4$, etc. Ara bé, en aquest tipus de funcions no parlem del *valor* de la funció per un(s) argument(s) determinat(s) en el mateix sentit en que ho fèiem abans. Si, per exemple, substituïm x per -1, 0, 1 i 2 en la funció $x^2 = 1$ tenim llavors:

[1] *Ibid.*, 130. A *Grundgesetze* Frege assenyala que "empro normalment les paraules "la funció $\Phi(\xi)$ té el mateix curs de valors que la funció $\Psi(\xi)$" amb el mateix significat que les paraules "les funcions $\Phi(\xi)$ i $\Psi(\xi)$ tenen sempre el mateix valor pel mateix argument""(*Frege 1962 1*, § 3, 7).

$$(-1)^2 = 1$$
$$0^2 = 1$$
$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1,$$

essent la primera i la tercera igualtats *vertaderes* i les altres dues *falses.* Consegüentment, afirma Frege: "Jo dic ara "el valor de la nostra funció és un valor de veritat" i diferencio el valor de veritat d'allò que és vertader del d'allò que és fals. Per abreujar anomeno a un el vertader i a l'altre el fals".[1] La introducció dels signes =, >, < en la construcció de les funcions té com objectiu la introducció de la noció de *concepte*, la qual és una noció clau en la fonamentació lògica de l'aritmètica, tal com hem pogut comprovar en la secció anterior. Tal com acabem de veure, el valor de la funció $x^2 = 1$ és sempre un dels dos valors de veritat. Doncs bé, si per un argument determinat, per exemple -1, el valor de la funció és el vertader, direm que "-1 és una arrel quadrada d'1" o bé "-1 cau sota el concepte d'arrel quadrada d'1" i si, en canvi, per un argument determinat, per exemple 2, el valor de la funció és fals, direm "2 no és arrel quadrada de 1" o "2 no cau sota el concepte d'arrel quadrada de 1". Amb això veiem, conclou Frege, "quan estretament es relacionen allò que en lògica s'anomena concepte i allò que nosaltres anomenem funció. En efecte, hom podrà dir veritablement: un concepte és una funció, el valor de la qual és sempre un valor de veritat".[2] En el cas que la funció en qüestió tingui dos arguments, Frege l'anomenarà *relació*. Així doncs, els conceptes i relacions són funcions el valor de les quals en ser completades és, ja no un objecte qualsevol, sinó un valor de veritat.

En definitiva, els conceptes i relacions fregeans són el que Russell i Whitehead anomenaran *funcions proposicionals* encara que, com el seu propi nom indica, el valor d'aquestes funcions serà per aquests autors una proposició, no un valor de veritat. És interessant remarcar que la diferent caracterització que fan Frege i Russell del mateix tipus d'entitat té una important repercussió en la teoria semàntica d'ambdós autors. Així, en el cas de Frege, la identificació entre el valor d'un concepte o relació amb el Vertader o el Fals imposa la necessitat d'explicar la relació d'aquests valors de veritat amb la proposició obtinguda en completar aquell concepte o relació. Per exemple, tal com hem vist abans, Frege sosté que el valor del concepte $x^2 = 1$ és el Vertader per $x = \pm 1$ i el Fals altrament. Ara bé,

---

1 *Frege 1967*, 132 (*Cf. ibid.*, § 2, 6-7).

2 *Ibid.*, 133 (*Cf. ibid.*, § 3, 8).

aquesta afirmació obliga a precisar en quin sentit podem afirmar que les proposicions $1^2 = 1$ i $0^2 = 1$ són vertadera i falsa respectivament. La solució de Frege consistirà a afirmar que aquestes proposicions són *sentits* del Vertader i el Fals respectivament i que aquests valors de veritat són alhora el *significat* dels enunciats a través dels quals expressem aquelles proposicions. Més generalment, tal com veurem en la propera secció, Frege identificarà el valor de veritat de la proposició obtinguda en completar un concepte o relació amb el *significat* de l'enunciat a través del qual s'expressa aquesta proposició i la proposició pròpiament dita -o, com dirà Frege, el *pensament*- amb el *sentit* de l'enunciat. En canvi, la identificació russelliana del valor d'una funció proposicional amb la mateixa proposició durà aquest autor a afirmar que el significat d'un enunciat és una *proposició* o, com dirà Russell a vegades, un *fet* (*Cf. infra*, cap. V, § 5). Ens ocuparem evidentment de totes aquestes qüestions quan expliquem la teoria semàntica d'ambdós autors, però és interessant avançar que, en el cas de Frege, l'anàlisi dels *noms propis i enunciats* en termes de *funció* i *argument* -això és, com les expressions obtingues en completar un *nom de funció* o un *nom de concepte* o *relació*- junt amb l'aplicació de les categories semàntiques de *sentit* i *significat* a ambdós tipus d'expressions ofereixen un *rationale* comú que permet incloure els conceptes i relacions dins la categoria de funcions, en la mesura que permet parlar del valor de veritat d'un concepte o relació de la mateixa que parlem, per exemple, dels nombres reals com a valors d'una funció real. En efecte, tal com s'esdevenia amb els conceptes i relacions, Frege identificarà el valor d'una funció qualsevol amb l'objecte *significat* o *denotat* per l'expressió obtinguda en completar l'expressió funcional corresponent -anomenada per Frege *nom propi*-, la qual expressarà alhora un *sentit* d'aquell objecte. Per exemple, donat que el valor de la funció x^2 per $x = \pm 1$ és 1, Frege dirà que les expressions $(-1)^2$ i 1^2 expressen cada una d'elles un *sentit* diferent del nombre 1 i que alhora *signifiquen* o *denoten* aquest nombre.

Cal destacar finalment que, de la mateixa manera que Frege parlava abans del curs de valor d'una funció, parlarà ara de l'*extensió* d'un concepte. Així, per exemple, donat que els conceptes $x^2 = 1$ i $(x+1)^2 = 2(x+1)$ tenen el mateix valor de veritat per a cada argument -a saber, el vertader per 1 i -1, el fals per la resta d'arguments-, Frege dirà que ambdós conceptes tenen la mateixa extensió i ho expressarà posant

$$\dot{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 = 1) = \dot{\alpha}\,([\alpha + 1]^2 = 2[\alpha + 1]).$$[1]

[1] Com direm tot seguit, les extensions són objectes i, per tant, la segona ocurrència del signe d'igualtat a l'enunciat anterior indica que les expressions a ambdós costats d'aquest signe signifiquen o denoten el mateix objecte. La interpretació de la igualtat que subjau a la terminologia emprada per

Segons això, conclou Frege, "podem qualificar el curs de valor d'una funció, el valor de la qual és per a cada argument un valor de veritat, com l'extensió d'un concepte".[1] En el cas que la funció sigui de dos arguments, Frege parlarà naturalment de l'extensió de la relació.

Hem explicat fa un moment que Frege amplia les nocions de *funció* - introduint els signes =, >, <- i la noció de *valor de la funció* -admetent com a tals els valors de veritat- per arribar així a la noció de *concepte*. Ara bé, segons Frege, no ens hem d'aturar aquí: "respecte allò que pot presentar-se com a argument. No s'han d'acceptar només nombres, sinó objectes [*Gegenstände*] en general [...] Com a possibles valors de la funció ja s'han introduït no fa gaire tots dos valors de veritat. Hem de seguir endavant i acceptar com a valors de la funció els objectes sense restricció".[2] Així, si considerem, per exemple, l'expressió "la capital de l'imperi alemany" i la descomponem en les parts "la capital de" i "l'imperi alemany", donat que la primera expressió no està saturada, tindrem en

"la capital de x",

l'expressió d'una funció que, en el cas de tenir l'imperi alemany com a argument, tindrà Berlín com a valor. Es tracta, doncs, d'una funció l'argument i valor de la qual són objectes. Arribats a aquest punt, convé que ens preguntem, què s'entén per *objecte*? En aquest cas, afirma Frege, hem arribat a quelcom que, degut a la seva simplicitat, no admet una anàlisi lògica i únicament podem dir: "Objecte és tot allò que no és funció, l'expressió del qual no comporta, per tant, cap lloc buit".[3] Així, són objectes tot allò denotat pels noms propis -nombres, ciutats, persones, ...- i per els enunciats -els valors de veritat-, donat que ambdues menes d'expressions no comporten cap lloc buit. També són objectes els cursos de valor de les funcions i, en particular, les extensions dels conceptes, perquè les expressions del tipus $\dot{\varepsilon}$ (... ε ...), a diferència de les expressions (... x ...) de les funcions i conceptes respectius, són saturades. Tal com veurem més endavant, els diferents tipus d'objectes que acabem d'esmentar -els objectes individuals, els valors de veritat i els cursos de valors- conformen l'ontologia de *Grundgezete der Arithmetik*. És interessant remarcar també que la inclusió dels valors de veritat a la categoria d'objecte permet posar els valors de veritat dins la mateixa

Frege en aquest article s'explicitarà en l'article de 1892 "Über Sinn und Bedeutung", que estudiarem en la secció següent.

1 *Ibid.*, 133 (*Cf. ibid.*, § 3, 8).

2 *Ibid.*, 134 (*Cf. ibid.*, § 2, 7).

3 *Ibid.*, 134 (*Cf. ibid.*, § 2, 7).

categoria ontològica que els valors de les funcions en general -objectes com ara individus, ciutats o nombres.

Un cop s'ha ampliat l'àmbit d'allò que pot constituir l'argument i el valor d'una funció als objectes en general, s'ha de tenir cura que les funcions estiguin ben definides -això és, tinguin un valor determinat per a tots i cadascun dels seus arguments- i això depèn en últim terme del fet que tota expressió tingui un significat, encara que sigui estipulat convencionalment. Suposem, en efecte, que tenim una funció com ara $x(x+1)$ o un concepte com $x+1=10$. D'acord amb el que s'ha dit abans, aquestes funcions poden ser completades amb qualsevol argument, obtenint-se com a resultat d'aquesta complementació no només expressions com ara $4+1$ i $9+1=10$, sinó també expressions com $\otimes +1$ o $\otimes +1 = 10$, on $\otimes$ denoti, per exemple, el sol. Ara bé, si l'expressió "$\otimes +1$" no tingués significat, no es podria determinar el valor de les funcions anteriors per a l'argument $\otimes$, amb la qual cosa aquestes funcions no estarien definides per a tots els seus possibles arguments. Cal doncs estipular, encara que sigui convencionalment, el significat de "$\otimes +1$" quan "$\otimes$" significa el sol. Més encara, com que Frege afirmarà a "Über Sinn und Bedeutung" que hi ha noms que tenen sentit, però no significat, l'argument anterior obligarà a estipular un significat convencional a tots els noms d'aquest tipus -a saber, el conjunt buit- i també als enunciats en els quals hi figurin aquests noms- a saber, el Fals.

Fins ara, Frege ha introduït els valors de veritat només com a valors de les funcions. Ara bé, d'acord amb el que s'ha dit abans, hom pot introduir també els valors de veritat com arguments de les funcions, de manera que es puguin considerar funcions els arguments i valors de les quals siguin valors de veritat. Ara bé, per a que aquestes funcions tinguin un valor determinat per a cada un dels possibles arguments, hom pot estipular una funció que transformi cada argument en un valor de veritat. A tal efecte, assenyala Frege: "Introdueixo com a tal

$$—\, x,$$

en tant que estableixo que el valor de la funció ha de ser el vertader quan es pren com argument el vertader i en tots els altres casos, al contrari, el valor d'aquesta funció és el fals

-així doncs, no només quan l'argument és fals, sinó també quan no és cap valor de veritat".[1] Així tenim, per exemple, que el valor de

$$— 1 + 3 = 4$$

és el vertader, però tant el valor de

$$— 1 + 3 = 5$$

com el valor de

$$— 4$$

és el fals. Consegüentment, observa Frege, "aquesta funció serà un concepte sota el qual cau el vertader i només ell".[2] Aquest traç horitzontal, que Frege anomenava a *Begriffschrift* traç de contingut, a partir d'ara l'anomena simplement *l'horitzontal* [*der Waagenrechte*]. Però, assenyala Frege, amb *l'horitzontal* no n'hi ha prou per a l'expressió d'un judici, en el qual no només s'expressa un valor de veritat sinó que s'afirma a més que l'és el vertader. Segons Frege, en efecte, "aquesta separació dels judicis d'allò sobre el qual es jutja sembla indispensable perquè sinó, no es podria expressar una simple suposició -és a dir, posar un cas sense jutjar al mateix temps sobre la seva realització. Em serveixo per aquest efecte d'un traç vertical a l'extrem esquerra de l'horitzontal de manera que, per exemple, amb

$$\text{“}\vdash 2 + 3 = 5\text{”}$$

afirmem: $2 + 3$ és igual a 5. D'aquesta manera no s'ha escrit com a

$$\text{“}2 + 3 = 5\text{”}$$

---

1 *Ibid.*, 136 (*Cf. ibid.*, § 5, 9).

2 *Frege 1962 1*, § 5, 10.

un valor de veritat, sinó que s'ha dit alhora que és el vertader".[1] És interessant remarcar el notable canvi de perspectiva que suposa "Über Funktion und Begriff" respecte a *Begriffschrift* pel que fa a la interpretació del signe complex

"$\vdash\!\!\!-\!\!\!-$ ".

En l'obra de 1879, en efecte, la veritat o falsedat s'introduïen amb el judici i, per tant, el pas d'un *contingut judicable* o *pensament* al seu *valor de veritat* es produïa amb l'afegitó del *traç vertical -traç del judici-* al *traç de contingut* -l'anomenat ara, *l'horitzontal*. En canvi, en la conferència de 1891 la veritat i falsedat s'introdueixen amb *l'horitzontal*, el qual s'interpreta com una funció que transforma qualsevol contingut -judicable o no- en un *valor de veritat*. Ara bé, com que aquesta funció és en realitat la *identitat* quan el seu argument és un valor de veritat, Frege requerirà un *rationale* que expliqui la relació dels valors de veritat amb els enunciats i les proposicions o pensaments expressades per ells. Aquest *rationale* l'ofereix evidentment l'aplicació de les categories de *sentit* i *significat* als enunciats a "Über Sinn und Bedeutung", que explicarem a la secció següent. Cal remarcar també que l'aplicació d'aquestes categories semàntiques a la interpretació dels traços horitzontal i vertical d'"Über Funktion und Begriff" donaran lloc a la interpretació semàntica d'aquests signes a *Grundgesetze der Arithmetik*.

Així mateix, la introducció de *l'horitzontal* en el sentit abans explicat permet reinterpretar els signes introduïts a *Begriffschrift* per a l'expressió de la negació, el condicional i els quantificadors universal i existencial, avançant-se de nou la interpretació semàntica que aquest signes rebran a *Grundgesetze*. En efecte, la negació s'introdueix ara com aquella funció "el valor de la qual és el fals precisament per als arguments per als quals el valor de $-\!\!-\, x$ és el vertader i el valor de la qual és, al contrari, el vertader per als arguments per als quals el valor de $-\!\!-\, x$ és el fals. La designo així

$$-\!\!\!\top\!\!\!-\, x \quad ,$$

[1] *Frege 1967*, 136-37. És a dir, "amb "$2+3=5$" només es designa un valor de veritat, sense que es digui quin dels dos és [...] D'aquesta manera, necessitem encara un signe especial per afirmar quelcom a vertader" (*Frege 1962 1*, § 5, 9).

amb la qual cosa anomeno al petit traç vertical el traç de la negació. Entenc aquesta funció com una funció amb l'argument $—\!— x$:

$$(—\!\!\top\!\!— x) = (—\!\!\top\!\!— [—\!— x])$$

en pensar en ambdós traços horitzontals com fusionats. Però també és

$$(—\!— [—\!\!\top\!\!— x]) = (—\!\!\top\!\!— x)$$

perquè el valor de $—\!\!\top\!\!— x$ sempre és un valor de veritat".[1] Conseqüentment, aquesta funció serà un concepte sota el qual cau tot objecte amb excepció del vertader.[2] Per la seva banda, el condicional es defineix com segueix: "El valor de la funció

$$\begin{array}{l} —\!\!\top\!\!— x \\ \quad \llcorner\!— y \end{array}$$

és el fals si es pren com *y*-argument el vertader i, al mateix temps, com *x*-argument un objecte que no és el vertader; en tots els altres casos, el valor d'aquesta funció és el vertader. El traç horitzontal de baix i les dues parts en què el de dalt es dividit pel traç vertical es consideren horitzontals. En conseqüència, hom pot considerar sempre que $—\!— x$ i $—\!— y$ són arguments, això és, valors de veritat".[3] Així doncs, la funció anterior és una funció amb dos arguments que només pren com a valors els valors de veritat. A *Grundgesetze*, Frege anomenarà al traç vertical que uneix els dos arguments, el *traç de condició* [*Bedingungstrich*] i, recollint el fet que els valors de veritat són objectes, definirà el condicional com "una relació que es dóna entre els objectes $—\!— x$ i $—\!— x$ en tots els casos, excepte en aquell

---

1 *Frege 1967*, 137.
2 *Cf. Frege 1962 1*, § 6, 10.
3 *Frege 1967*, 141.

en què —— x és el fals i —— y és el vertader”.[1] En conclusió, podem dir que a “Über Funktion und Begriff” es defineixen de forma expressa, per primera vegada en la història, la *negació* i el *condicional* com a funcions de veritat, això és, com a funcions l’argument i el valor de les quals és un valor de veritat -o, més exactament, com un concepte i una relació que prenen també valors de veritat com arguments. Com ja sabem, Peirce també definí el condicional i la negació com a funcions de veritat en l’article “On the Algebra of Logic” de 1885 uns anys abans que Frege i, a més, proposà un procediment per decidir la validesa d’una fórmula o la correcció d’un argument que coincideix essencialment amb el procediment de decisió per taules de veritat desenvolupat sobretot a partir de Łuckasiewicz, Post i Wittgenstein a la dècada dels vint (*Cf. supra*, cap. II, § 9). Amb tot, encara que Peirce defineix el condicional i la negació a partir de les seves condicions de veritat, no hi ha una anàlisi pròpiament dit d’aquestes operacions que demostri efectivament que són *funcions de veritat* com hi ha a Frege, entre d’altres coses perquè Peirce no disposa d’un concepte arbitrari de funció com el que maneja Frege i que li permet una adequada anàlisi d’aquestes operacions. De la conferència de 1891 cal destacar finalment la nova interpretació de la *quantificació universal* i *existencial* i la introducció de la *jerarquia de funcions*, però tot això ho estudiarem millor a partir de la *magnum opus* de Frege: *Grundgesetze der Arithmetik* (*Cf. infra*, § 8).

7. Sentit i significat

A *Begriffschrift*, Frege havia escrit que els enunciats en els quals s’afirmava la identitat de contingut expressaven en realitat una relació entre els signes a través dels quals aquells venien donat, no pas entre els mateixos continguts. La raó fonamental que l’havia dut a afirmar això havia estat, com Frege recorda tot just començar “Über Sinn und Bedeutung” (*1892*), la necessitat d’explicar la diferència entre el valor cognitiu [*Erkentnisswert*] dels enunciats del tipus $a = a$ i $a = b$. Segons Frege, en efecte:

> Si pretenguéssim veure en una igualtat [del tipus $a = b$] una relació entre allò que signifiquen els noms “*a*” i “*b*”, semblaria que $a = b$ no podria diferenciar-se de

[1] *Frege 1962 1*, § 4, 8 i § 12, 20.

> $a = a$, donat el cas que $a = b$ fos vertader. Car amb aquests signes s'expressaria una relació entre una cosa i ella mateixa i, de fet una [relació] en la qual tota cosa està amb si mateixa, però no amb cap altra cosa diferent. El que hom vol dir amb $a = b$ sembla ser que el signes "*a*" i "*b*" signifiquen el mateix, de manera que seria precisament d'aquests signes del que estem parlant; afirmaríem una relació entre ells.[1]

A "Über Sinn und Bedeutung", Frege criticarà aquesta primera resposta al problema i proposarà una nova resposta basada en la seva coneguda distinció entre *sentit* [*Sinn*] i *significat* [*Bedeutung*]. Tal com acabem de veure, en efecte, d'acord amb la interpretació de *Begriffschrift*, en un enunciat del tipus $a = b$ s'afirmaria una relació entre els signes a i b. Ara bé, continua Frege:

> Aquesta relació existirà entre els noms propis o signes, en la mesura que anomenin o designin quelcom. Seria una relació mediada pel lligam de cada un dels dos signes amb la mateixa cosa designada. Però aquest lligam és arbitrari. Hom no pot prohibir a ningú d'agafar qualsevol esdeveniment o objecte produït arbitràriament com a signe per a quelcom. Però, en aquest cas, l'enunciat $a = b$ ja no faria referència a la cosa mateixa, sinó tan sols al nostre mode de designació [*Bezeichnungsweise*]; no hi expressaríem cap coneixement pròpiament dit. Però això és precisament el que volem en molts de casos. Si el signe "*a*" es distingís del signe "*b*" només com a objecte (vet aquí, per la seva forma) i no com a signe, això és, no en la mesura que designa quelcom, llavors el valor cognitiu de $a = a$ seria essencialment el mateix que el de $a = b$, en cas que $a = b$ fos vertader. Una diferència només pot tenir lloc si a la diferència entre el signes correspon una diferència en el tipus de presentació [*Art des Gegebenseins*] d'allò designat.[2]

L'argument de Frege sembla ser el següent: Un mateix objecte pot ser designat per signes diferents de forma completament arbitrària -per exemple, si nosaltres designem el planeta Venus a través dels signes $\oplus, \wedge, \Pi$, ...- o, pel contrari, a través de signes que expressin la manera com aquell objecte ens és donat, això és, el "mode de designació" o "tipus de presentació" d'aquest objecte -per exemple, si designem el planeta Venus a través dels noms propis "l'estel del matí", "l'estel del vespre", "el planeta més pròxim a la terra", ...-. Ara bé, la unió de signes diferents del primer tipus mitjançant el signe d'igualtat produeix

1 *Frege 1967*, 143. A "Über Sinn und Bedeutung" Frege empra les lletres minúscules llatines a, b, c, … i el signe $=$ en comptes de les majúscules A, B, C, … i el signe $\equiv$ que emprava a *Begriffschrift*.
2 *Ibid.*, 143-44.

un enunciat que no té cap valor cognitiu. Per exemple, donat que els signes Π i $\wedge$ designen Venus de forma completament arbitrària, l'enunciat $\Pi = \wedge$ no tindrà altra valor cognitiu que el d'informar-nos que ambdós signes designen el mateix objecte. No s'esdevé el mateix, en canvi, quan en un enunciat unim signes diferents del segon tipus. Per exemple, els enunciats "l'estel del matí = l'estel del vespre" o "l'estel del vespre = el planeta més pròxim al sol" tenen valor cognitiu, perquè cada nom propi expressa un *tipus de presentació* o *mode de designació* diferent del planeta Venus.[1] En resum: perquè hi hagi una diferencia entre el valor cognitiu dels enunciats del tipus $a = a$ i $a = b$, cal que a la diferència entre els signes a i b correspongui també "una diferència en el tipus de presentació d'allò designat", car altrament els enunciats $a = a$ i $a = b$ tindran el mateix valor cognitiu -això és, no en tindran cap. Evidentment, hom podria objectar que l'argument anterior no aporta cap crítica a la tesi de *Begriffschrift* segons la qual un enunciat del tipus $a = b$ afirma una relació entre els signes a i b -a saber, que aquests signes designen el mateix objecte-, sinó només que aquesta tesi no permet explicar la diferència entre el valor cognitiu dels enunciats del tipus $a = a$ i $a = b$, quan a i b són signes arbitraris -i això no sembla gaire cosa. Però l'extensió de l'argument fregeà als signes no arbitraris ofereix un argument directe contra la interpretació de *Begriffschrift*. Siguin, per exemple, a i b els noms propis "l'estel del matí" i "l'estel del vespre", llavors, d'acord amb la tesi de *Begriffschrift,* un enunciat com ara:

(*i*) "l'estel del matí és el mateix que l'estel del vespre",

s'ha d'interpretar com l'enunciat:

(*ii*) ""l'estel del matí" i "l'estel del vespre" denoten el mateix objecte".

Ara bé, mentre que (*i*) afirma quelcom sobre un cos celestial, a saber, Venus, (*ii*) afirma quelcom sobre dos signes o noms, a saber, "l'estel del matí" i "l'estel del vespre". En altres paraules, (*i*) i (*ii*) tenen un valor cognitiu o contingut informatiu diferent i, per tant, no podem reinterpretar (*i*) a través de (*ii*). Veiem així que en l'origen de la interpretació de *Begriffschrift* de les igualtats o identitats com enunciats que afirmem quelcom sobre els mateixos signes que figuren en ells, hi ha una confusió entre *ús* i *esment* i, per tant, entre el

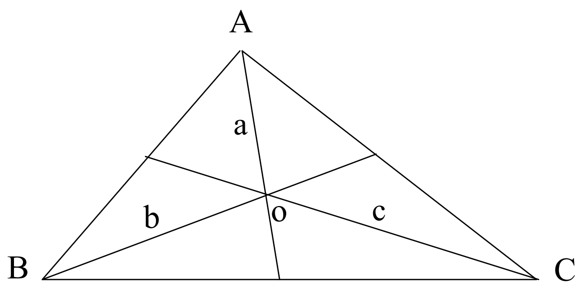
[1] Al final d'aquesta secció explicarem exactament *perquè* els enunciats d'aquesta mena tenen valor cognitiu.

nivell lingüístic i el metalingüístic, la qual impossibilita llavors la introducció de la teoria de la identitat en el llenguatge objecte de la lògica de primer ordre (*Cf. supra*, § 2).

Tal com acabem de veure, Frege conclou a "Über Sinn und Bedeutung" que la interpretació de *Begriffschrift* dels enunciats d'identitat és incapaç de donar raó de la diferència de valor cognitiu dels enunciats del tipus $a = a$ i $a = b$ i que per això cal que a la diferència entre els signes correspongui una diferència en el "mode de designació" o "tipus de presentació" d'allò designat. Per explicar què vol dir amb això, Frege empra el següent exemple:

> Siguin *a*, *b*, *c*, les rectes que connecten els vèrtexs d'un triangle amb el punt mitjà dels costats oposats. El punt d'intersecció de *a* i *b* és llavors el mateix que el punt d'intersecció de *b* i *c*. Així doncs, tenim diferents designacions pel mateix punt i aquests noms ("punt d'intersecció de *a* i *b*", "punt d'intersecció de *b* i *c*") indiquen alhora el tipus de presentació.[1]

Podem representar gràficament l'exemple de Frege mitjançant la següent figura:



D'aquí se segueix immediatament, assenyala Frege, que:

> Amb un signe (nom, combinació de paraules, signe escrit), a més d'allò designat, la qual cosa podríem anomenar el significat [*Bedeutung*] del signe, hem de pensar també allò unit amb ell, que podríem anomenar el sentit [*Sinn*] del signe, on s'ha d'incloure el tipus de presentació. D'acord amb això, en el nostre exemple, el

[1] *Ibid.*, 144.

significat de les expressions “el punt d’intersecció de *a* i *b*” i “el punt d’intersecció de *b* i *c*” serà certament el mateix, però no el seu sentit.[1]

Veiem, doncs, que de la mateixa manera que el problema de distingir entre el valor cognitiu dels enunciats del tipus $a = a$ i $a = b$ havia dut Frege a distingir a *Begriffschrift* entre el *contingut conceptual* i el *mode de determinació* d’un signe, ara el duu a distingir entre el seu *significat* i el seu *sentit*. Però si a *Begriffschrift* Frege no va saber explotar la distinció entre *contingut conceptual* i *mode de determinació* per donar raó de la diferència de valor cognitiu entre els enunciats del tipus $a = a$ i $a = b$, caient en la confusió entre ús i esment ja explicada, la distinció a “Über Sinn und Bedeutung” entre *significat* i *sentit* es convertirà en la clau de volta que el permetrà resoldre el problema. Quant això, és interessant remarcar que els exemples emprats en un i altre lloc per il·lustrar les distincions respectives són molt similars, la qual cosa mostra que al darrera d’ells hi ha una intuïció originària comuna. L’exemple de *Begriffschrift* és efectivament el següent:

> Suposem que sobre una circumferència hi ha un punt A, al voltant del qual gira una línia recta. Quan aquesta última forma una diàmetre, anomenem al punt en l’extrem oposat a A el punt B. Més generalment, anomenarem al punt d’intersecció de la recta i la circumferència en qualsevol moment [de la rotació de la primera] el punt B [...] Hom pot preguntar llavors: Quin punt talla la circumferència quan la recta és perpendicular al diàmetre? La resposta serà: el punt A.[2]

Veiem així, continua Frege, que:

> El mateix punt pot ser determinat de dues maneres:
>
> 1. [Com el punt A] directament a través de la intuïció.
> 2. Com el punt B, quan la recta és perpendicular al diàmetre.
>
> A cada un d’aquests modes de determinació [*Bestimmungsweise*] els correspon un nom particular.[3]

Tot això suggereix que allò que Frege anomenava a *Begriffschrift* el *contingut conceptual* d’un signe (nom propi o enunciat) i el seu *mode de determinació* eren els

---

[1] *Ibid.*, 144.
[2] *Frege 1964*, 14.
[3] *Ibid.*, 14.

candidats naturals a convertir-se en allò que a "Über Sinn und Bedeutung" anomenarà el seu *significat* i *sentit*.[1] Ara bé, és important remarcar que els exemples emprats en un i altre lloc per justificar la necessitat de distingir entre "contingut conceptual" i "mode de determinació" i "significat" i "sentit" respectivament, en realitat justifiquen només aquestes distincions en la mesura que s'apliquen als noms propis i, per tant, permeten donar una explicació o interpretació coherent dels enunciats del tipus $a = b$ -o, si emprem la simbologia de *Begriffschrift*, dels enunciats del tipus $A \equiv B$ -, quan a i b són variables metalingüístiques que representen noms propis, però no quan representen judicis o enunciats. D'aquí que, tal com veurem més endavant, encara que hi hagi una correspondència exacta entre la distinció de l'obra de 1879 i la de l'article de 1892 pel que fa als noms propis, aquesta correspondència es trenqui pel que fa als enunciats i l'aplicació de la distinció entre sentit i significat als enunciats sembli tan artificiosa i allunyada de l'aplicació originària als noms propis.[2] És interessant que ens preguntem, doncs, com s'han d'interpretar les distincions d'un i altre lloc quan s'apliquen als enunciats i, conseqüentment, als enunciats del tipus $a = b$, quan a i b representen enunciats. Però abans d'intentar respondre aquesta qüestió, cal que analitzem més a fons com entén Frege les categories de sentit i significat aplicades als noms propis i als enunciats.

Els signes estudiats per Frege a "Über Sinn und Bedeutung" i als quals s'aplica la distinció entre sentit i significat són efectivament els noms propis [*Eigennamen*] -en els quals s'inclouen les descripcions definides- i els enunciats [*Sätze*]. Quant als noms propis, com ja sabem, el significat és l'*objecte* [*Gegestand*] designat per ell i el seu sentit conté el *tipus de presentació* o *mode de designació* d'aquest objecte. Frege dirà que "un nom propi (paraula, signe, combinació de signes, expressió) expressa [*drückt aus*] el seu sentit, significa [*bedeutet*] o designa [*bezeichnet*] el seu significat",[3] però nosaltres també emprarem, junt amb aquestes últimes expressions, les expressions *denotar* i *denotació* o *referència*. En

1 Altres fets que suggereixen aquesta correspondència són que Frege empra a *Begriffschrift*, d'una banda, el verb *bedeuten* [significar] per referir-se a la relació que hi ha entre un signe i el seu contingut conceptual i, d'una altra, l'expressió *Bestimmungsweise* [mode de determinació] en un sentit idèntic al que a "Über Sinn und Bedeutung" empra les expressions *Bezeichnungsweise* [mode de designació] i *Art des Gegebenseins* [tipus de presentació], amb les quals caracteritza el *sentit* d'un signe.

2 Per exemple, tal com veurem més endavant, en el llenguatge científic cada nom propi -descripcions definides apart- designa un objecte, de manera que hi ha una correspondència biunívoca entre el noms propis i els objectes. En canvi, tots els enunciats vertaders denotaran el Vertader i tots els enunciats falsos denotaran el Fals, de manera que cada objecte -valor de veritat- serà denotat per un nombre infinit d'enunciats.

3 *Frege 1967*, 147.

afirmar que els noms propis designen o signifiquen objectes, Frege no fa sinó explicitar la que és una de les funcions primordials dels noms propis en el llenguatge quotidià: la funció referencial o denotativa. Ja hem dit abans que Frege inclou dins la categoria dels noms propis no només allò que en el llenguatge quotidià solem anomenar noms propis -Aristòtil, Venus, Marta, ...-, sinó també les anomenades sovint descripcions definides -"el mestre d'Alexandre", "l'estel del matí", "la filla de Montse", … -, però això no ens hauria de sorprendre excessivament, perquè en el llenguatge quotidià també emprem a vegades indistintament ambdós tipus d'expressions o emprem de forma exclusiva descripcions definides per designar determinats objectes -"la torre Eiffel", "la sagrada família", etc. La manera en què Frege empra a "Über Sinn und Bedeutung" la noció d'*objecte* és també molt similar a la manera en què s'utilitza habitualment aquesta noció en el llenguatge quotidià. Per *objecte* cal entendre essencialment un *objecte individual*, allò que Russell en dirà més endavant un *terme* o *entitat*. Amb tot, l'assimilació en el mateix article de 1892 dels *enunciats* als noms propis i el requeriment ja expressat a *Grundlagen* d'introduir els nombres com *objectes* lògics, durà Frege a ampliar tant la categoria d'*objecte* -incloent-hi els *valors de veritat* i els *cursos de valors*- com la de *nom propi* -incloent-hi els *enunciats* i els *noms de cursos de valors*.[1] És interessant remarcar també que al llarg de tota l'obra de Frege hi ha una perfecta correspondència entre noms propis i objectes: els objectes són allò designat pels noms propis i aquests es caracteritzen alhora com aquell tipus d'expressions que denoten objectes. Com que, d'una altra banda, els objectes són essencialment els individus, s'han d'excloure de la categoria de noms propis expressions del tipus "alguns homes", "tots els homes", "cap home", etc -anomenades, a voltes, *descripcions indefinides*- i també expressions com ara "la mort de Cèsar" o "la guerra del Peloponès" -les anomenades, a voltes, *frases nominals*. Això no sembla massa greu pel que fa als interessos de Frege perquè aquesta és precisament la mena d'expressions que desapareixen una vegada analitzats lògicament els enunciats en els quals figuren aquestes expressions -en el primer cas, gràcies al quantificadors i les variables, i en el segon cas reemplaçant prèviament les frases nominals per *frases verbals*.[2]

1 Com ja hem dit en la secció anterior, la primera exposició sistemàtica i completa de la semàntica fregeana es troba a *Grundgesetze der Arithmetik*. És interessant notar també que els diferents tipus d'objectes esmentats aquí es corresponen amb els que havíem inclòs dins la categoria d'objecte en la secció anterior.

2 Per exemple, l'enunciat "la mort de Cèsar s'esdevingué el 49 a. de C." pot reinterpretar-se com "Cèsar morí el 49 a. de C." Com que, com veurem més endavant, Frege considera que les frases verbals (enunciats) denoten valors de veritat, no fets (Russell), sembla plausible suposar que Frege hauria considerat també que les frases nominals, en cas que denotessin, denotarien valors de veritat,

La tesi fregeana segons la qual un nom propi -no arbitrari- expressa un *sentit*, en el qual s'inclou el *tipus de presentació* o *mode de designació* de l'objecte designat sembla també força intuïtiva, encara que la concreció del que Frege entén per les expressions en cursiva no és gens fàcil. Abans havíem dit que el significat d'"el punt d'intersecció de *a* i *b*" i "el punt d'intersecció de *b* i *c*" era el mateix -el punt *o*-, però no el seu sentit. Anàlogament, els noms propis "L'estel del matí" i "L'estel del vespre" tenen el mateix significat -a saber, el planeta Venus-, però diferent sentit. En canvi, assenyala Frege, altres noms propis com ara "Ulisses" o "La sèrie menys convergent" tenen sentit, però no significat. Ara bé, ¿en quin sentit podem afirmar que les dues primeres parelles de noms propis expressen un *mode de designació* diferent de l'objecte denotat per elles -el punt *o* i el planeta Venus respectivament- o que els noms propis "Ulisses" i "la sèrie menys convergent" expressen un *tipus de presentació* d'un objecte que tanmateix no existeix? La resposta sembla ser la següent: en el sentit que *cada nom propi explicita una sèrie de condicions o característiques a través de les quals hom pot determinar un objecte*. Així, en el primer cas, els noms "el punt d'intersecció de *a* i *b*" i "el punt d'intersecció de *b* i *c*" determinen el punt *o* com el punt on es tallen les rectes *a* i *b* i les rectes *b* i *c* respectivament. En el segon cas, els noms "L'estel del matí" i "L'estel del vespre" determinen el planeta Venus com el darrer planeta visible al cel abans de la sortida del sol i el primer planeta visible al cel després de la posta del sol respectivament. Finalment, tothom que hagi llegit l'*Odissea* o sàpiga una mica de matemàtiques podria explicitar les característiques que ha de tenir un objecte per ser reconegut com Ulisses o la sèrie menys convergent, encara que en realitat no hi hagi cap objecte que satisfaci aquestes condicions. Veiem així que parlar del *tipus de presentació* o *mode de designació* expressat per un nom propi és parlar de les condicions o característiques que un objecte ha de satisfer per ser el referent o significat d'un nom propi -i pot esdevenir-se evidentment que cap objecte satisfaci aquestes condicions. Així, podríem dir que el *sentit* d'un nom propi inclou les condicions la satisfacció de les quals són necessàries i suficients per determinar l'objecte denotat per ell i, per tant, que conté un *criteri d'identificació* gràcies al qual pot *determinar* unívocament aquest objecte.[1] En aquest sentit, seria potser més adient emprar la terminologia de *Begriffschrift* i parlar de *mode de determinació*, que no pas de *tipus de presentació* o *mode de designació*, tal i com Frege fa a "Über Sinn und Bedeutung", car aquestes expressions suggereixen, a més, la presencia de l'objecte denotat o designat.

---

no pas fets.

[1] Com veurem més endavant, aquesta explicació és essencial per poder explicar la diferència de valor cognitiu entre els enunciats del tipus $a = a$ i $a = b$.

Frege no explicita mai com cal entendre el sentit d'un nom propi *strictu sensu*, excepte en una famosa nota a peu de pàgina a propòsit del nom "Aristòtil", que val la pena reproduir íntegrament:

> En el cas d'un nom propi pròpiament dit com "Aristòtil", les opinions sobre el sentit poden, sens dubte, discrepar. Hom podria adoptar com a tal, per exemple: el deixeble de Plató i mestre d'Alexandre el Gran. Qui faci això, associarà amb l'enunciat "Aristòtil nasqué a Estagira" un sentit diferent a qui prengui com a sentit d'aquest nom: el mestre d'Alexandre el Gran nascut a Estagira. En la mesura que el significat roman el mateix, aquestes variacions del sentit poden permetre's, encara que s'han d'evitar en l'estructura teòrica d'una ciència demostrativa i no s'ha de permetre que ocorrin en un llenguatge perfecte.[1]

Aquest text palesa dues tesis relatives als noms propis particularment interessants. La primera és que cada nom propi té associat un sentit, és a dir, un conjunt de propietats associades d'alguna manera amb ell que determinen l'objecte designat per ell com l'únic que satisfà aquestes propietats.[2] D'aquí que si el sentit d'un nom propi ha de poder explicitar-se d'alguna manera ha de ser a través d'una descripció definida, per la qual cosa sembla evident que Frege adoptà de forma implícita un tesi que anys més tard Russell farà seva i formularà de forma explícita, a saber, que els noms propis són descripcions definides *disfressades*. La segona tesi és que dos usuaris d'un mateix llenguatge poden associar sentits diferents a un mateix nom propi i, per tant, identificar el portador d'aquest nom a través de descripcions definides diferents, però que en el llenguatge científic cada nom propi ha de tenir associat únicament un sentit -això no obsta evidentment que un mateix objecte pugui ser designat a través de diferents noms propis, cada un dels quals tingui un sentit diferent.

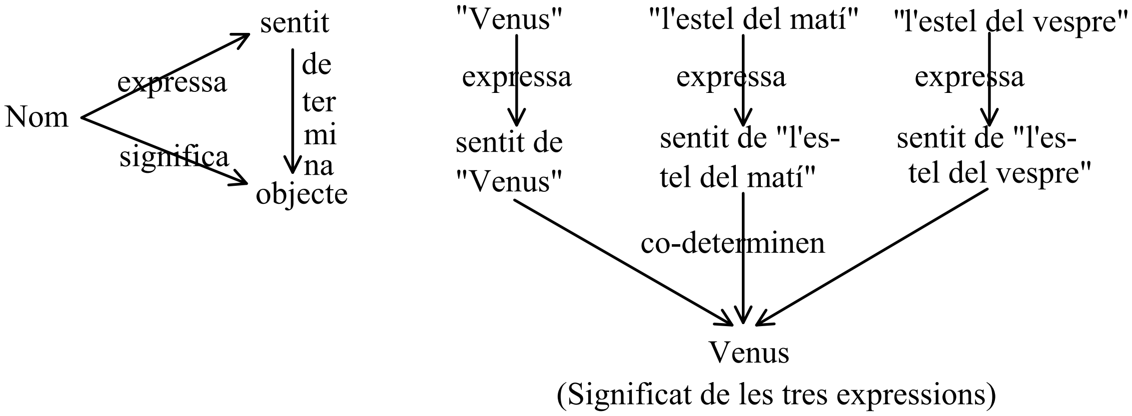
Podríem resumir la discussió anterior a partir de les tres tesis següents, certament minimalistes, però suficients per retenir els trets essencials de la caracterització fregeana de les nocions de sentit i significat aplicades als noms propis: (*i*) Per regla general, un nom propi significa o denota un objecte i expressa un sentit a través del qual determina aquest objecte; (*ii*) diferents noms propis poden tenir un mateix significat o denotació, però diferent sentit i,

---

1 *Ibid.*, 144, n. 2.

2 Aquesta concepció és contrària a la concepció tradicional dels noms propis, l'exposició més clara de la qual la trobem en el filòsof J. S. Mill. D'acord amb aquest autor, en efecte, un nom propi denota simplement el seu portador i no té cap altra funció lingüística com podria ser, per exemple, la de descriure l'objecte que duu aquest nom com l'únic que satisfà certes propietats.

per tant, poden co-determinar a través del seu sentit el mateix objecte; (*iii*) tot nom propi expressa un sentit, però no significa o denota necessàriament un objecte -*i.e.* no té necessàriament significat. Podríem representar les dues primeres tesis mitjançant els esquemes següents[1]:



Una vegada explicada la caracterització fregeana de les nocions de sentit i significat aplicades als noms propis, cal que ens demanem què entén Frege per aquestes nocions quan són aplicades als enunciats. En primer lloc, Frege afirma que tot enunciat conté un pensament [*Gedanke*], o més precisament, el contingut objectiu d'un pensament.[2] Sigui, per exemple, l'enunciat:

"L'estel del matí és un cos il·luminat pel sol",

i suposem que aquest enunciat té un significat i que aquest és el seu contingut objectiu. Llavors, en substituir el nom propi "L'estel del matí" per un altre amb el mateix significat, per exemple, "L'estel del vespre", el significat de l'enunciat no canviaria i l'enunciat anterior expressaria el mateix pensament que l'enunciat:

"L'estel del vespre és un cos il·luminat pel sol".

Però els pensaments expressats per ambdós enunciats són diferents com ho mostra, segons Frege, el fet que si algú no sabés que els noms propis "L'estel del matí" i "L'estel del vespre"

[1] El primer esquema està extret essencialment de *Taylor 1988*, 6.

[2] "Entenc per pensament no l'acció subjectiva del pensament, sinó el seu contingut objectiu, el qual és susceptible de ser propietat comuna de molts" (*Frege 1967*, 148, n.5).

tenen el mateix significat consideraria segurament un enunciat vertader i l'altre fals. En canvi, el significat hauria de ser el mateix -donant per suposat que el significat d'un enunciat roman idèntic quan hom substitueix un nom propi per un altre amb el mateix significat. Per tant, conclou Frege, "el pensament no pot ser el significat de l'enunciat, sinó que més aviat haurem de considerar-lo com el sentit".[1] Un cop argumentat que el significat d'un enunciat no pot consistir en el pensament expressat per ell, Frege es pregunta si hi ha enunciats que tinguin sentit -això és, que expressin un pensament-, però no tinguin significat i si estem justificats a intentar anar més enllà del sentit d'un enunciat i reconèixer-los un significat. La resposta a la primera pregunta, assenyala Frege, és presumiblement afirmativa, en la mesura que hi ha enunciats algunes de les parts dels quals tenen sentit però no significat. Per exemple, escriu Frege, "l'enunciat "Ulisses fou desembarcat a Itaca profundament adormit" té manifestament un sentit. Però donat que és dubtós que el nom Ulisses que figura en ell tingui un significat, llavors també és dubtós que l'enunciat sencer en tingui un".[2] Frege continua aleshores:

> Amb tot, és cert que si algú té l'enunciat [anterior] per vertader o fals, reconeixerà a Ulisses no només un sentit, sinó també un significat, car és del significat d'aquest nom que el predicat és afirmat o negat [...] Si només interessés el sentit de l'enunciat (el pensament), no caldria preocupar-se pel significat d'una part de l'enunciat, donat que per al sentit d'un enunciat només és rellevant el sentit d'aquesta part, no el seu significat. El pensament resta el mateix, tant si el nom Ulisses té un significat com si no. El fet que ens preocupem sobretot pel significat d'una part de l'enunciat indica que reconeixem generalment i reivindiquem un significat per a l'enunciat mateix [...] Així doncs, estem plenament justificats a no conformar-nos amb el sentit d'un enunciat, sinó a preguntar-nos també pel seu significat.[3]

És a dir, des del moment que prenem una actitud científica envers el llenguatge, és a dir, ens preguntem per la veritat o falsedat dels enunciats, requerirem que els noms propis que figurin el ell tinguin no només un sentit, sinó també un significat; car és d'aquest significat que nosaltres afirmem o neguem quelcom en l'enunciat i, doncs, només si atribuïm

[1] *Ibid.*, 148. Notem, en efecte, que donant per suposat que les proposicions anteriors tenen significat i que aquest és el mateix en les dues, els pensaments expressats per elles es poden entendre com dues maneres diferents de donar-se o expressar-se el mateix significat.

[2] *Ibid.*, 148.

[3] *Ibid.*, 148-49.

un significat als noms propis de l'enunciat podrem dir si aquest és vertader o fals. Ara bé, si les parts components d'un enunciat tenen significat i nosaltres ens interessem per aquests significats és perquè contribueixen d'alguna manera al significat de l'enunciat i aquest és de valor per la nostra recerca, és a dir, perquè reconeixem un significat a l'enunciat i considerem que aquest significat és rellevant per determinar la veritat o falsedat de l'enunciat. En definitiva, si volem que cada nom propi tingui no només un sentit, sinó també un significat i no ens basta amb el sentit d'un enunciat -el pensament- és "perquè, i en la mesura que, ens interessa el valor de veritat [...] És l'aspiració a la veritat que ens empeny sempre a progressar del sentit al significat",[1] això és, a reconèixer més enllà del sentit, un significat a l'enunciat.

Finalment, una vegada ha raonat que el significat d'un enunciat no és el pensament expressat per ell -el qual identificarà amb el seu sentit- i que tan bon punt hom s'interessa per la veritat o falsedat d'un enunciat ha de reconèixer que aquest no només té un sentit, sinó també un significat, Frege es pregunta en què consisteix el significat d'un enunciat. Frege respon aquesta pregunta afirmant que el significat d'un enunciat és el seu valor de veritat i que aquesta tesi se segueix de l'argument exposat en el paràgraf anterior. Segons Frege, en efecte:

> Hem vist que a un enunciat sempre li hem de cercar un significat, si ens interessa el significat d'una part component seva; i que aquest és sempre i només el cas si ens preguntem pel valor de veritat. D'aquesta manera som empesos a reconèixer el *valor de veritat* d'un enunciat com el seu significat. Entenc per valor de veritat d'un enunciat el fet que sigui vertader o fals. No hi ha altres valors de veritat. Per abreujar, en dic a l'un el Vertader i a l'altre el Fals.[2]

Frege dedueix de la discussió anterior una sèrie de conclusions, que nosaltres estudiarem des d'un punt de vista crític en les pàgines següents:

1. *El significat d'un enunciat és el seu valor de veritat*. Aquesta tesi és coneguda modernament com la *tesi d'identificabilitat*. Essencialment, l'argument central d'"Über Sinn und Bedeutung" a favor d'aquesta tesi, sembla ser el següent: Si hom té un enunciat per vertader o fals, llavors requerirà que totes les seves parts components tinguin significat; en

---

1 *Ibid.*, 149.
2 *Ibid.*, 149.

canvi, si hom no està interessat per la veritat o falsedat d'un enunciat, llavors no es preocuparà pel significat de les seves parts components. Anàlogament, si hom atribueix un significat a l'enunciat, requerirà que les parts components seves tinguin significat i, en canvi, si hom no està interessat pel significat d'un enunciat, llavors no es preocuparà pel significat de les seves parts components. Per tant, el significat d'un enunciat és el seu valor de veritat. En suma, l'argument fregeà tindria la següent forma:

(*i*) Un enunciat té significat si, i només si, les seves parts components tenen significat.
(*ii*) Un enunciat és vertader o fals si, i només si, les seves parts components tenen significat.

Per tant:

(*iii*) El significat d'un enunciat és el seu valor de veritat (el Vertader o el Fals).

Ara bé, aquest raonament és manifestament incorrecte, car de (*i*) i (*ii*) no se segueix (*iii*), sinó una tesi més feble, a saber:

(*iv*) Un enunciat és vertader o fals si, i només si, té significat.

De fet, una tesi alternativa a (*iii*) i compatible amb les tesis (*i*) i (*ii*), seria la tesi russelliana:

(*v*) El significat d'un enunciat és un fet (estat de fets, situació, etc),

la qual té a més la virtut de ser força plausible i de seguir-se naturalment de la semàntica implícita a *Begriffschrift*. Per explicar això cal que recuperem la pregunta que ens formulaven unes pàgines abans relativa a com cal entendre les distincions de *Begriffschrift* entre *contingut conceptual* i *mode de determinació* i d'"Über Sinn und Bedeutung" entre *sentit* i *significat* quan s'apliquen als enunciats i, conseqüentment, com s'han d'interpretar els enunciats del tipus $a = b$, quan a i b representen enunciats. La resposta d'"Über Sinn und Bedeutung" a aquesta qüestió és prou coneguda: donat que els enunciats signifiquen o denoten valors de veritat, l'enunciat anterior diu que els enunciats representats per a i b tenen el mateix valor de veritat, però expressen un pensament diferent. A *Begriffschrift*, en canvi, Frege no abordà aquesta qüestió i es fa difícil de respondre les preguntes anteriors perquè no tenim una noció exacta del que entenia pel contingut conceptual d'un enunciat. Hom podria respondre, en efecte, aplicant el mateix model explicatiu que quan *a* i *b* representen noms propis, que un mateix contingut conceptual és determinat de dues formes diferents a través dels enunciats *a* i *b*. Però què és el que tenen en comú *a* i *b* i que Frege anomena el seu contingut conceptual? Frege assenyala en diversos indrets que la noció de *contingut judicable* de *Begriffschrift* incloïa el que a partir d'"Über Sinn und Bedeutung" anomenarà el *valor de veritat* d'un enunciat i el *pensament* expressat per ell, això és, el seu significat i sentit, la qual cosa suggereix identificar allò que anomenava el contingut conceptual d'un enunciat amb el seu valor de veritat i el contingut judicable pròpiament dit amb el pensament expressat per ell. D'aquesta manera, hom pot estendre la interpretació de *Begriffschrift* dels enunciats del tipus $a = b$ al cas en què *a* i *b* representen enunciats, i donar una explicació de la diferència d'aquesta mena d'enunciats amb els enunciats del tipus $a = a$ completament anàloga a la d'"Über Sinn und Bedeutung". Però aquesta interpretació del contingut conceptual d'un judici com el seu valor de veritat és del tot inversemblant, perquè Frege considerava que el contingut conceptual d'un judici estava inclòs en el seu contingut judicable, això és, en allò que després anomenarà el pensament expressat per ell. Ara bé, Frege insistirà a "Über Sinn und Bedeutung" ben clarament que el valor de veritat d'un enunciat no forma part del pensament expressat per ell, de la mateixa manera que el sol, per exemple, no forma part del pensament expressat per "el sol és l'astre més gran del nostre sistema solar". La única opció factible és, doncs, identificar el contingut conceptual d'un judici amb el fet o situació descrita per aquest. Aquesta opció sembla, en efecte, molt més plausible perquè, en la mesura que hom entengui els fets o situacions com complexos d'objectes i propietats o relacions, permet considerar el contingut conceptual d'un enunciat com a funció del contingut conceptual de les seves parts components. Considerem els dos enunciats següents suggerits per l'exemple d'"Über Sinn und Bedeutung" explicat abans:

> *a*. Les línies *a* i *b* són equi-intersecants amb les línies *b* i *c*
> *b*. El punt d'intersecció de les línies *a* i *b* és el mateix que el punt d'intersecció de les línies *b* i *c*.

En aquest cas es té evidentment que $a = b$, però què és el que tenen en comú els dos enunciats anteriors i que permet escriure la identitat anterior? La resposta més plausible a això seria afirmar que ambdós enunciats designen o descriuen la mateixa situació o el mateix estat de fets. En efecte, de la mateixa manera que abans afirmaven que el punt *o* podia ser designat de dues maneres, hom podria afirmar ara que la mateixa figura geomètrica pot ser descrita de dues maneres. Més encara, el punt *o* forma part de la figura geometria en qüestió, de manera que podem dir, per exemple, que el contingut conceptual d'"el punt d'intersecció de les línies *a* i *b*" forma part del contingut conceptual d'"el punt d'intersecció de les línies *a* i *b* és el mateix que el punt d'intersecció de les línies *b* i *c*". El que volem argumentar amb tot això és no només la plausibilitat de la identificació entre el contingut conceptual d'un enunciat i el fet o situació designat per ell, sinó també que el contingut conceptual era el candidat natural a convertir-se en el significat dels enunciats, donat que la identificació anterior dóna una interpretació força plausible dels enunciats del tipus $a = b$. I, tanmateix, els fets o situacions no juguen cap paper en la semàntica de Frege posterior a "Über Sinn und Bedeutung", en la qual el valor de veritat d'un enunciat i el pensament expressat per ell exhaureixen el seu valor semàntic. Seria interessant, doncs, preguntar-se pel motiu d'aquest rebuig més o menys implícit dels fets o situacions com a significat dels enunciats i de l'acceptació en lloc seu dels valors de veritat, sobretot si tenim en compte que, tal com acabem de veure, la semàntica implícita a *Begriffschrift* apuntava més aviat en aquella direcció, és a dir, cap a una concepció semàntica dels enunciats més semblant a la de Russell que no pas a la que el mateix Frege adoptarà a partir d'"Über Sinn und Bedeutung".

L'argument que hem estudiat en les pàgines anteriors no és l'únic argument bastit per Frege a favor de la *tesi d'identificabilitat*. En efecte, tant a "Über Sinn und Bedeutung" com en la correspondència amb Russell, Frege suggereix un argument basat en el principi de substitució *salva veritate* de Leibniz. Això no ens hauria de sorprendre, sobretot si considerem que Frege havia considerat d'ençà *Begriffschrift* el principi leibnizià com a criteri general per decidir la igualtat de contingut. Com ja sabem, en efecte, Frege afirmava a *Begriffschrift* que $A \equiv B$ significa que "el signe A i el signe B tenen el mateix contingut conceptual, de manera que es pot posar B en el lloc de A i recíprocament a tot arreu" (*ja citat, cf. supra*, § 2). A *Grundlagen* Frege accepta també el principi leibnizià com a criteri d'igualtat de contingut i l'empra conseqüentment per decidir si les definicions són correctes -això és, si el *definiendum* i el *definiens* expressen el mateix contingut. Sembla clar, doncs, que Frege interpretava el principi leibnizià *salva veritate* en el sentit següent:

> “Dues expressions tenen el mateix contingut si, i només si, són reemplaçables mútuament *salva veritate*”.

I, donat que el contingut d’un signe esdevindrà a partir d’“Über Sinn und Bedeutung” el seu significat, podem concloure que l’interpretarà a partir d’aquest article en el sentit següent:

> “Dues expressions tenen el mateix significat si, i només si, són reemplaçables mútuament *salva veritate*”.

L’argument de Frege a favor de la *tesi d’identificabilitat*, tal com és exposat a “Über Sinn und Bedeutung”, és el següent:

> Si la nostra suposició que el significat d’un enunciat és el seu valor de veritat és correcta, aquest darrer ha de romandre invariable quan reemplacem una part de l’enunciat per una expressió amb el mateix significat. I aquest és, de fet, el cas. Leibniz dóna la definició: *Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate*. Si estem tractant amb enunciats per als quals el significat dels seus components és del tot rellevant, ¿quina característica, llevat del seu valor de veritat, pot trobar-se que pertanyi també a aquests enunciats generalment i romangui invariable per substitucions del tipus esmentat?[1]

D’una altra banda, en una carta adreçada a Russell deu anys després de la publicació d’“Über Sinn und Bedeutung”, Frege dedueix a partir d’un argument completament anàleg a l’argument central d’aquell article tan sols el que hem dit abans que se’n podia deduir, a saber, que hom ha d’atribuir significat a un enunciat, en la mesura que i només quan, hom es demani per la seva veritat o falsedat. La tesi d’identificabilitat és dedueix llavors del fet que “el significat d’un enunciat ha de ser sempre quelcom que no canviï quan reemplacem un signe per un altre que tingui el mateix significat, però un sentit diferent. [I] el que no canvia en aquest procés és el seu valor de veritat”.[2] Per explicar el seu raonament, Frege empra un conegut exemple: Siguin a = “l’estel de matí”, b = “L’estel del vespre” i sigui F la funció “

1 *Ibid.*, 150.
2 *Frege 1976*, 235.

… és un planeta"; llavors, donat que "l'estel del matí" i "l'estel del vespre" tenen el mateix significat, a saber, Venus, tindrem d'acord amb l'axioma (52) de *Begriffschrift*:

$$a = b \rightarrow Fa = Fb,$$ [1]

que "l'estel del matí és una planeta" i "l'estel del vespre és un planeta" tenen el mateix significat, és a dir, que "l'estel del matí és una planeta" = "l'estel del vespre és un planeta" és un enunciat vertader. Ara bé, quin és el significat de cada un del enunciats que es troben a un costat i l'altre del signe d'igualtat en l'enunciat anterior? D'acord amb la tesi abans esmentada segons la qual el que no canvia en reemplaçar un signe per un altre en un enunciat és el seu valor de veritat, hem de concloure que el significat d'aquests enunciats és el seu valor de veritat. En resum, "si hom empra el signe d'igualtat entre enunciats, llavors ha de reconèixer com a significat d'un enunciat el seu valor de veritat".[2] D'on es dedueix que, en general, el significat d'un enunciat és el seu valor de veritat. Val a dir, amb tot, que aquest argument no té tampoc cap força demostrativa. L'argument fregeà és, en efecte, de la següent forma:

(*i*)' El significat d'un enunciat no ha de canviar si substituïm una part component seva per una altra amb el mateix significat, però diferent sentit.
(*ii*)' El valor de veritat d'un enunciat no canvia si substituïm una part component seva per una altra amb el mateix significat, però diferent sentit.

Per tant:

(*iii*)' El valor de veritat és el significat d'un enunciat.

Les tesis (*i*)' i (*ii*)' constitueixen sengles principis de substitució *salva significationem* i *salva veritate* respectivament.[3] Però, d'ambdues tesis no se segueix en realitat la *tesi d'identificabilitat*. Per això, en lloc de (*ii*)' es requeriria la tesi més forta:

---

1 Aquest axioma formalitza el principi de substitució *salva significationem* esmentat fa un moment.

2 *Ibid.*, 235.

3 Tal com hem vist en les pàgines anteriors, a "Über Sinn und Bedeutung", Frege pressuposa el primer principi a la seva argumentació a favor de la distinció entre el sentit i el significat dels enunciats i, com veurem després, dedueix en el mateix article el segon principi com a corol·lari de la

(*ii*)'' El valor de veritat d'un enunciat és *l'únic* que no canvia si substituïm una part component seva per una altra amb el mateix significat, però diferent sentit.

Però aquesta tesi no sembla, en general, vertadera, car és plausible pensar que el fet o situació descrita per un enunciat tampoc canvia en substituir una part component d'aquest enunciat per una altra amb el mateix significat, però diferent sentit. Hem de concloure, doncs, que la tesi russelliana segons la qual el fet o situació descrita per un enunciat és el seu significat -la tesi (*v*) abans esmentada-, en la mesura que és compatible amb les premisses dels diferents argument que Frege basteix tant a "Über Sinn und Bedeutung" com a la correspondència amb Russell a favor de la tesi d'identificabilitat, qüestiona directament la pretensió de Frege que aquesta tesi se segueixi d'aquells arguments o d'arguments semblants.[1] Però si els arguments fregeans a favor de la *tesi d'identificabilitat* no semblen massa convincents, hi ha un argument, suggerit sens dubte per les remarques de Frege i basat en un parell de principis bàsics de la seva filosofia, molt més convincent i influent que val la pena comentar. Aquest argument fou exposat per primera vegada per Gödel en el seu conegut article "Russell's mathematical logic" (*1944*) i reformulat després Curch, Quine, Davidson i altres amb l'intenció de mostrar la plausibilitat de la *tesi d'identificabilitat*. Però abans d'exposar aquest argument, convé fer algunes precisions importants. Tal com hem dit abans, d'ençà *Begriffschrift*, Frege acceptà com a vàlid el principi leibnizià *salva veritate* que interpretarà a partir d'"Über Sinn und Bedeutung" en el sentit que, en un enunciat qualsevol, podem substituir qualsevol nom propi per un altre amb el mateix significat però diferent sentit, sense que això alteri el valor de veritat del enunciat. Ara bé, donada la *tesi d'identificabilitat*, aquest principi de substitució se segueix immediatament de la suposició que el significat d'un enunciat és funció del significat de les seves parts components. De fet, tal com hem pogut comprovar en estudiar l'argument emprat per Frege per demostrar que el significat d'un enunciat no pot ser el pensament expressat per ell, Frege donà per suposat també quelcom anàleg en referència al sentit. Frege no formulà explícitament aquests *principis de composicionalitat*, però està clar que els acceptà implícitament i que tenen

tesi d'identificabilitat.

[1] Amb tot, aquesta tesi deixa sense explicar la relació entre el significat d'un enunciat i el seu valor de veritat expressada a la tesi (*iv*), que se segueix de les tesis (*i*) i (*ii*) i de la plausibilitat de les quals no n'hi ha el menor dubte -aquesta explicació, tal com veurem més endavant, esdevindrà un problema de difícil solució per a Russell. En canvi, la tesi (*iii*) de Frege, explicita la relació entre el significat i el valor de veritat d'un enunciat com una relació d'identitat i, per tant, dispensa a Frege de tota explicació ulterior en referència a aquesta relació.

importants conseqüències per a la seva filosofia del llenguatge. Podríem formular aquests *principis de composicionalitat* de la següent manera:

(*i*) El *significat* d'un enunciat està determinat unívocament pel *significat* de les seves parts components.
(*ii*) El *sentit* d'un enunciat està determinat unívocament pel *sentit* de les seves parts components.

Doncs bé, tal com ha assenyalat Gödel, si admetem amb Frege, el *principi de composicionalitat* per al significat i la tesi segons la qual les descripcions definides com ara "l'autor de Waverley" o "el rei d'Anglaterra" signifiquen o denoten un objecte, "llavors se segueix que l'enunciat "Scott és l'autor de Waverley" significa el mateix que "Scott és Scott"; i això duu de nou quasi inevitablement a la conclusió que tots els enunciats vertaders tenen el mateix significat (així com també tots els falsos)".[1] Tal com hem dit abans, l'argument de Gödel a favor de la tesi d'identificabilitat ha estat reelaborat per alguns dels lògics més influents de la segona meitat del segle vint. Un d'aquests arguments és l'exposat per Church en les primeres seccions de la seva coneguda i influent obra *Introduction to Mathematical Logic* (*1956*). Church considera els següents enunciats:

(1) Walter Scott és l'autor de Waverley
(2) Walter Scott és l'home que escriví les vint-i-nou novel·les de Waverley
(3) El número, tal que Walter Scott escriví tantes novel·les de Waverley, és vint-i-nou.
(4) El nombre de comtats de Utah és vint-i-nou

D'acord amb Church, tots i cada un d'aquest enunciats tenen la mateixa denotació. El pas de (1) a (2) i de (3) a (4) està garantit pel *principi de composicionalitat* i pel fet que les

[1] *Gödel 1990*, 122. S'ha de dir, amb tot, que Gödel no considerava l'argument anterior com un argument definitiu a favor de la identificació entre el significat d'un enunciat i el seu valor de veritat car, com indica ell mateix, podríem considerar amb Russell que els enunciats denoten fets i, conseqüentment, que enunciats diferents denoten coses diferents. Ara bé, d'acord amb el que s'ha dit abans, "aquest punt de vista relatiu als enunciats fa necessari o bé eliminar el principi esmentat més amunt sobre el significat [el principi de composicionalitat] [...] o negar que una frase descriptiva denoti l'objecte descrit" (*Ibid.*, 123). Tal com veurem en el proper capítol aquest serà precisament el camí emprès per Russell, el qual afirmarà que una descripció definida no denota cap objecte, sinó que només té significat (*meaning*) en context (*Cf. infra*, cap. VI, § 8).

descripcions definides presents en els dos primers i els dos últim enunciats respectivament denoten el mateix objecte. Quant al pas de (2) a (3), Church afirma que (2), encara que potser no és sinònim de (3), "és com a mínim tan semblant que podem estar segurs que té la mateixa denotació".[1] Ara bé, continua Church, els enunciats (3) i (4) "encara que tenen la mateixa denotació d'acord amb la línia de raonament anterior, semblen tenir, de fet, molt poc en comú. La cosa més notable que tenen en comú és que ambdós són vertaders. L'elaboració d'exemples d'aquesta mena duen ràpidament a la conclusió, si més no plausible, que tots els enunciats vertaders poden tenir la mateixa denotació. I podríem emprar de la mateixa manera exemples anàlegs per suggerir que tots els enunciats falsos tenen la mateixa denotació".[2] Ara bé, tal com han demostrat Barwise i Perry en l'article "Semantic Innocence and Uncompromising Situations" (*1975*), l'argument de Church és inacceptable des d'una concepció semàntica dels enunciats que prengui les *situacions* seriosament. En efecte, aquests autors han desenvolupat en aquest article una *concepció model-teorètica* de la semàntica, la qual vol donar raó de la vella idea russelliana segons la qual "els enunciats representen situacions, complexos d'objectes i propietats en el món"[3] i des de la qual es demostra que l'argument de Church "se superposen dues maneres diferents de mirar la relació entre els enunciats i les situacions".[4] Nosaltres no exposarem evidentment la teoria semàntica d'aquests autors, però si que voldríem fer-nos ressò de la seva crítica a l'argument de Church, fonamentalment perquè ens ajudarà a remarcar la importància de les descripcions definides per a qualsevol teoria semàntica i a veure l'error comú que subjau a tots els arguments a favor de la identificació entre el significat d'un enunciat i el seu valor de veritat. Segons Barwise i Perry, donada la concepció semàntica dels enunciats abans esmentada, el rol semàntic de les parts components d'un enunciat és fonamentalment identificar els objectes i propietats o relacions que conformen les situacions descrites per els enunciats en els quals figuren. Ara bé, d'una banda, el pas de (1) a (2) requereix que la funció semàntica de les descripcions definides "l'autor de Waverley" i "l'home que va escriure les vint-i-nou noveles de Waverley" sigui *merament* identificar Scott. Des d'aquest punt de vista, que és precisament el que adoptà Frege, les quatre descripcions definides s'interpreten per l'objecte que descriuen, Scott en els dos primers casos, el número 29 en els dos darrers. Però, tal com assenyalen Barwise i Perry, "des d'aquesta perspectiva, el pas de (2) a (3) no funciona en

1 *Church 1956*, 25.
2 *Ibid.*, 25.
3 *Martinich 1996*, 369.
4 *Ibid.*, 369.

absolut [...] (2) designa una situació l'únic constituent de la qual és Scott, mentre que (3) designa una situació l'únic constituent de la qual és el número 29".[1] D'una altra banda, el pas de (2) a (3) requereix que la descripció definida "l'home que va escriure les vint-i-nou novel·les de Waverley" no s'interpreti simplement com Scott, sinó que aporti el complex d'objectes i propietats que menciona a la situació que l'enunciat descriu. Però des d'aquest punt de vista, més en línia amb la teoria de les descripcions de Russell, el pas de (1) a (2) o de (3) a (4) no està en absolut justificat. Per exemple, tal com assenyalen Barwise i Perry, "l'enunciat (3) designa vint-i-nou com el nombre de les novel·les de Waverley que Scott escriví, però l'enunciat (4) designa vint-i-nou com el nombre de comtats de Utah, situacions diferents si mai hi ha hagut situacions diferents".[2] La conclusió que podem extreure de la crítica que fan aquests autors a l'argument de Church és que els quatre enunciats esmentats per aquest autor denoten situacions diferents i, per tant, no podem concloure que tenen la mateixa denotació -a no ser evidentment, que identifiquem prèviament la denotació d'aquests enunciats amb el seu valor de veritat, és a dir, acceptem com a premissa de l'argument la conclusió a la qual volem arribar. Podríem dir, doncs, que per concloure que el significat o denotació d'un enunciat és el seu valor de veritat, no n'hi ha prou en suposar que la seva denotació sigui funció de la denotació de les seves parts components, encara que adoptem un punt de vista relatiu a la denotació de les descripcions definides com el de Frege, sinó que cal també que tots els enunciats vertaders -o falsos- tinguin la mateixa denotació, és a dir, que els enunciats *equivalents lògicament* denotin el mateix. Però, tal com acabem de veure, aquesta hipòtesi esdevé inacceptable tan bon punt adoptem una concepció semàntica dels enunciats semblant a l'adoptada per Russell i desenvolupada formalment per Barwise i Perry. D'acord amb aquest concepció, en efecte, dos enunciats poden ser vertaders, sense tenir la mateixa denotació (ex: "plou" i "Jordi corre") i poden ser equivalents lògicament, però descriure fets o situacions diferents (ex: "plou o no plou" i "Jordi corre o no corre").[3]

2. *El sentit d'un enunciat és el pensament expressat per ell*. Com ja sabem, en efecte, l'altre tesi fonamental d'"Über Sinn und Bedeutung", junt amb la tesi d'identificabilitat comentada en el paràgraf anterior, és la tesi segons la qual el *sentit* d'un enunciat és el *pensament* expressat per ell. A continuació explicarem com entenia Frege els pensaments i,

[1] *Ibid.*, 376.
[2] *Ibid.*, 376.
[3] Aquests dos darrers enunciats són tautològics, en virtut de la seva forma lògica, i, per tant, són lògicament equivalents.

per tant, com entenia la tesi que dóna títol a aquest paràgraf. A banda d'"Über Sinn und Bedeutung", la nostra font principal d'informació serà l'article titulat precisament "Der Gedanke" ["El pensament"] (*1918*). D'acord amb aquests articles, els pensaments són 1. els continguts dels enunciats assertòrics; 2. els veritables portadors dels valors de veritat; 3. els objectes de les actituds proposicionals. 4. entitats objectives, no subjectives; 5. entitats complexes i estructurades. A les pàgines següents estudiarem la caracterització fregeana dels pensaments, fent-nos ressò dels tres primers punts.[1]

2.1. *Els pensaments són els continguts dels enunciats assertòrics*. En l'article de 1918 abans esmentat, Frege identifica el pensament expressat per un enunciat assertòric amb el seu *contingut*. Però aquesta tesi ha de ser precisada en dues direccions. D'una banda, com ja havia fet a *Begriffschrift*, Frege assenyala que tots aquells components d'un enunciat assertòric destinats a actuar sobre els sentiments de l'oient -paraules com *malauradament* o *afortunadament*- o a emfatitzar o suggerir quelcom -paraules com *ja* o *encara* o l'ús de la veu activa o passiva-, etc, no afecten el pensament expressat per un enunciat en el sentit que no afecten la veritat o falsedat d'allò expressat per un enunciat.[2] D'una altra banda, s'esdevé sovint que l'enunciat per si sol no és suficient per expressar un pensament i, per tant, podríem dir que és *incomplet* en aquest sentit. Aquest és el cas dels enunciats en els quals hi figuren verbs o altres expressions -*avui*, *ahir*- que contenen una referència temporal o expressions com ara *jo*, *aquí*, *allí* o *ara*. En tots aquests casos, assenyala Frege, "el text tot sol, tal com queda fixat en el llenguatge escrit, no és l'expressió completa del pensament, sinó que hom requereix per a copsar-lo correctament el coneixement de certes circumstàncies que acompanyen el llenguatge oral [*Das Sprechen*], les quals s'empren com a mitjà per a l'expressió del pensament".[3] Podríem dir, doncs, que aquesta mena d'enunciats requereixen per expressar un pensament que siguin pronunciats en un context determinat, conegut per l'oient, per la qual cosa un mateix enunciat podrà expressar pensament diferents en contextos diferents i davant auditoris diferents. Considerem, per exemple, l'enunciat "Cèsar travessà el Rubicó l'any passat" i suposem que Marc Antoni i Brutus pronunciaren aquest enunciat l'any 43 i 41 a. de C. respectivament. Llavors, el pensament expressat per aquest enunciat és

1 Quant a la caracterització dels pensaments com entitats objectives (4) ja n'hem dit alguna al llarg de la nostra exposició i hi retornarem breument al final del paràgraf 3. La caracterització del pensament com a entitats complexes i estructurades (4) se segueix evidentment del principi de composicionalitat relatiu al sentit, al qual també ja hem fet referència en la nostra exposició.

2 Això mostra que la noció de *pensament* o *contingut* és molt similar a la noció de *contingut conceptual* de *Begriffschrift*.

3 *Frege 1967*, 349.

completament diferent en un i altre cas. Més encara, en el primer cas, es tracta d'un pensament fals, mentre que en el segon cas es tracta d'un pensament vertader, per la qual cosa l'enunciat "Cèsar travessà el Rubicó l'any passat" serà vertader si és pronunciat l'any 41 a. de C. i fals altrament. Ara bé, s'esdevé el mateix amb els pensaments expressats per aquest enunciat? És a dir, són també aquests vertaders o falsos depenent del context en què siguin pronunciats? La resposta és negativa, car en realitat ambdós enunciats expressen pensament diferents en ser pronunciats per un o altre patrici romà i en ambdós pensaments l'ambigüitat temporal ha desaparegut completament.[1] Podem concloure així que els pensaments, a diferència dels diferents tipus d'enunciats que acabem de veure, són vertaders o falsos absolutament, sense cap mena de relativització local o temporal.

2.2. *Els pensament són el veritables portadors dels valors de veritat*. Com ja hem dit manta vegada, un enunciat significa o denota el seu valor de veritat i expressa un pensament, el qual s'identifica llavors amb el seu sentit. Així, donat que la categoria fonamental a efectes lògics és la de significat, hom podria pensar que només els enunciats són pròpiament vertaders o falsos, mentre que els pensaments ho són derivativament, en la mesura que associem a cada enunciat un pensament com a sentit seu. Però el punt de vista de Frege, tal com suggereix ja el que hem dit en el paràgraf anterior, és exactament el contrari. Segons ell, en efecte, un enunciat és una cadena de signes amb sentit i és només gràcies al fet que un enunciat expressa, en virtut de les convencions d'un llenguatge, un pensament determinat, que podem dir aquest enunciat és vertader o fals. Frege ho expressa així de clar en l'article *Der Gedanke*: "quan anomenem un enunciat vertader volem dir que el seu sentit és vertader. D'aquí que la única cosa que planteja realment el problema de la veritat sigui el sentit dels enunciats".[2] Ara bé, aquesta tesi imposa necessàriament una explicació de la relació entre el sentit d'un enunciat i el seu significat, això és, entre el pensament expressat per ell i el seu valor de veritat. Per a Frege, la veritat no és una relació entre els pensaments i quelcom altre, com ara els fets,[3] ni tampoc una propietat dels pensaments. Per exemple, Frege assenyala a "Über Sinn und Bedeutung" que el contingut de l'enunciat "El pensament que 5 és un nombre primer és vertader" és el mateix que el de "5 és un nombre primer" i, per tant, el valor de veritat del primer enunciat no depèn d'haver afirmat el predicat "és vertader" del

---

[1] El pensament expressat per l'enunciat pronunciat per Marc Antoni és el mateix que el de l'enunciat "Cèsar travessà el Rubicó l'any 44 a. de C." i l'expressat per idèntic enunciat posat en boca de Brutus seria el mateix que el de l'enunciat "Cèsar travessà el Rubicó l'any 42 a. de C."

[2] *Ibid*., 344.

[3] Frege exposarà a "Der Gedanke" diversos arguments contra la concepció de la veritat com una *correspondència* entre els pensaments i la realitat.

subjecte “5 és un nombre primer”, sinó que és ja present d’alguna manera en el mateix pensament expressat per l’enunciat “5 és un nombre primer”.[1] D’aquí se segueix, afirma Frege, que “amb l’articulació de subjecte i predicat hom arriba sempre només al pensament, mai d’un sentit al seu significat, mai d’un pensament al seu valor de veritat”.[2] Un valor de veritat, en efecte, és un *objecte* com també ho és el sol, si bé el primer és un objecte abstracte, mentre que aquest últim és un objecte concret, i, per tant, “no pot formar part d’un pensament, no pas més que ho pot fer el sol”.[3]

Hem vist, doncs, que Frege es limita a caracteritzar negativament la relació entre els pensaments i els valors de veritat, caracterització que troba el seu complement perfecte a la tesi segons la qual els valors de veritat són objectes. Ara bé, si els pensaments no són vertaders o falsos derivativament -això és, en virtut dels enunciats a través dels quals s’expressen- i si la veritat o falsedat no és una propietat -relacional o no- dels pensaments, en quin sentit es pot afirmar que un pensament és vertader o fals? Frege no respon aquesta pregunta, però és plausible que pensés que cada pensament té unes *condicions de veritat* i que aquestes vénen determinades pel sentit de les seves parts components. Per exemple, l’enunciat “Venus és l’estel del matí” expressaria un pensament vertader si, i només si, “Venus” i “l’estel del matí” expressen dos modes de determinació del mateix objecte. Anàlogament, “Venus té fases” expressaria un pensament vertader si, i només si, el predicat “té fases” expressa un mode de determinació d’una propietat que s’escau a l’objecte que el nom propi “Venus” determina a través del seu sentit. El secret està evidentment en no postular *fets* o quelcom semblant com a denotació dels pensaments, la qual cosa obligaria a introduir-los a nivell ontològic i a concebre la veritat com una mena de correspondència amb els fets, la qual cosa és contrària, com ja sabem, a l’esperit i la lletra de Frege.

2.3. *Els pensaments són l’objecte de les actituds proposicionals*. Una de les tesis més conegudes de Frege, la qual pot adduir-se a més com una justificació de la validesa de la seva distinció entre sentit i significat, és la tesi segons la qual en determinats contextos lingüístics un enunciat subordinat significa o denota el pensament que expressa habitualment com a sentit seu. Aquests contextos els conformen essencialment aquelles oracions en què el

[1] És evident, doncs, que s’imposa una nova interpretació dels traços horitzontal i vertical, la qual Frege desenvoluparà a *Grundgesetze der Arithmetik* en base a la interpretació de l’article “Über Funktion und Begriff” d’aquests signes i les noves categories semàntiques introduïdes a “Über Sinn und Bedeutung”.

[2] *Ibid.*, 150.

[3] En el capítol següent estudiarem la polèmica amb Russell respecte a si els objectes denotats pels noms propis formen part o no de les proposicions expressades pels enunciats en què aquelles expressions figuren -la famosa polèmica sobre *les neus del Mont Blanc* (*Cf. infra,* cap. VI, § 5).

verb principal és un verb del tipus: *dir*, *afirmar*, *pensar*, *opinar*, *creure*, *desitjar*, *escoltar*, *veure*, etc, i l'oració subordinada és una *clàusula nominal abstracta* [*abstrakten Nennsätzen*] introduïda per la conjunció *que*.[1] Russell anomenarà a aquesta mena d'enunciats *actituds proposicionals* [*propositional attitudes*], perquè contenen un *verb d'actitud proposicional*, això és, un verb que sembla expressar una actitud que una persona podria adoptar respecte una proposició.[2] Des d'un punt de vista semàntic, la característica fonamental de les *actituds proposicionals* és que no són funcions de veritat i, per tant, no satisfan el principi de substitució *salva veritate* de Leibniz, per la qual cosa s'inclouen dins els anomenats *contextos intensionals*, nom amb el qual hom denota tots els contextos que no satisfan el test de substituïbilitat que es deriva d'aquell principi.[3] Considerem, per exemple, els dos enunciats següents:

(*a*) El moviment aparent del sol està produït pel moviment real de la terra;
(*b*) Les òrbites planetàries són el·líptiques.

Ambdós enunciats són òbviament vertaders. Ara bé:

(*a'*) Copèrnic creia que el moviment aparent del sol està produït pel moviment real de la terra,

és vertader, però:

(*b'*) Copèrnic creia que les òrbites planetàries són el·líptiques,

---

1 Frege empra probablement el nom *clàusula nominal* perquè es tracta d'oracions que poden substituir-se per *frases nominals*. Per exemple, *Copèrnic afirmà que la terra es movia* és equivalent a *Copèrnic afirmà el moviment de la terra*, la qual ha estat obtinguda per substitució de la frase verbal subordinada de la primera oració per una frase nominal. Nosaltres emprarem en lloc seu l'expressió *clàusula-que*, més habitual a la literatura contemporània sobre el tema.

2 Així, per exemple, la proposició que la terra es mou podria haver estat *afirmada*, *coneguda*, *pensada*, *creguda*, etc, per Copèrnic. Notem, per cert, que aquesta terminologia i el *rationale* corresponent no són gaire adients per a les proposicions introduïdes per verbs que expressen una percepció no epistèmica, com ara *veure*, *escoltar*, etc, a no ser, es clar, que identifiquem amb Russell les proposicions amb els fets o quelcom semblant.

3 Els contextos que sí satisfan aquest test s'anomenen *extensionals*. Els contextos intensionals inclouen no només els contextos epistèmics, de creença, etc, sinó també i, en particular, els contextos modals, però nosaltres els entendrem exclusivament en el primer sentit -*i.e.* per designar les actituds proposicionals. És interessant destacar finalment que tots aquests contextos no només no satisfan el test de substituïbilitat, sinó també altres tests com el de la generalització existencial.

és fals i, tanmateix, (*b'*) pot obtenir-se a partir de (*a'*) substituint (*a*) per (*b*), que són tots dos vertaders i, per tant, tenen el mateix significat, la qual cosa contradiu clarament el principi de substitució *salva veritate*. Un altre exemple: els enunciats

(*c*) La terra és rodona,
(*d*) El tercer planeta més a prop del sol és rodó,

tenen el mateix significat, car *la terra* i *el tercer planeta més a prop del sol* denoten el mateix objecte. Però tenim com abans que:

(*c*') Colom afirmà que la terra és rodona,

és vertader, mentre que

(*d*') Colom afirmà que el tercer planeta més a prop del sol és rodó,

és fals, la qual cosa contradiu novament el principi de substitució *salva veritate* de Leibniz.

La solució fregeana a aquesta violació del principi de substitució leibnizià és afirmar que aquesta violació és merament aparent, car encara que (*a*) i (*b*) o (*c*) i (*d*) tenen el mateix significat o denotació quan s'empren en un context habitual, adquireixen un significat diferent quan ocorren com una *clàusula-que* en un context intensional com el dels enunciats (*a'*) i (*c'*), és a dir, quan són l'objecte d'una actitud proposicional. En aquest mena de contextos, en efecte, els enunciats signifiquen el pensament que expressen habitualment com a sentit seu i, per tant, cada una de les parelles d'enunciats (*a*)-(*b*) i (*c*)-(*d*) tenen en realitat un significat diferent,[1] per la qual cosa els enunciats (*b*') i (*d*') obtinguts per la substitució de (*a*) per (*b*) i (*c*) per (*d*) en *(a*') i (*c*') respectivament no preserven el valor de veritat d'aquests darrers enunciats.

Frege dedueix la tesi que les *clàusules-que* signifiquen en els contextos intensionals el pensament que expressen com a sentit seu en els contextos habituals a partir de l'explicació que dóna del significat de les oracions subordinades en estil indirecte [*ungerade Rede*], per la

[1] En particular, la diferència entre el significat de (*c*) i (*d*) en el context dels enunciats (*c*') i (*d*') ve donada pel fet que els noms propis "la terra" i "el planeta menys distant del sol" tenen un sentit diferent en un context habitual, com ens ho mostra el fet que l'enunciat "la terra és el planeta menys distant del sol" té un valor cognitiu evident.

qual cosa anomenarà genèricament *significat indirecte* [*ungerade Bedeutung*] al significat que tenen les *clàusules-que* en contextos intensionals. Com és ben sabut, en l'estil directe, hom reprodueix literalment una frase d'algú altre posant-la entre cometes, mentre que en l'estil indirecte hom la reprodueix, no necessàriament de forma literal, transformant-la en una oració subordinada. Doncs bé, d'acord amb Frege, "en l'estil directe un enunciat significa novament un enunciat i en l'estil indirecte [significa] un pensament".[1] Veiem, doncs, que els enunciats i les seves parts components poden figurar en tres tipus de contextos diferents, en cada un dels quals tindran un tipus de significat diferent. Així, per exemple, l'enunciat "Venus és l'estel del matí" té, en un *context habitual*, el seu *significat habitual*, a saber, un valor de veritat; en un *context directe* com ara "Xavier va dir: "Venus és l'estel del matí"" té el seu *significat directe*, a saber, un enunciat; i en un *context indirecte*, com ara "Xavier va dir que Venus és l'estel del matí", té el seu *significat indirecte*, a saber, un pensament. Està clar que, en afirmar que el significat de les oracions subordinades en estil indirecte és el pensament expressat per aquest enunciat, Frege vol donar raó de la intuïció del fet que, per a que un enunciat en estil indirecte sigui vertader, no és necessari que la clàusula subordinada reprodueixi literalment les paraules d'altri, sinó que és suficient que aquesta clàusula subordinada reprodueixi el pensament expressat per aquell, això és, que no alteri el sentit de les seves paraules. Suposem, per exemple, que el president de la Generalitat en una visita a Holanda hagués dit: "Holanda és un model a seguir per a Catalunya". Aleshores els periodistes desplaçats a aquell país potser s'haguessin fet ressò de l'afirmació del president de la Generalitat inserint en els seus articles periodístics frases com ara: "El president de la Generalitat afirmà que Holanda és un model a seguir per a Catalunya", o potser: "El president de la Generalitat afirmà que els Països Baixos són un model a seguir per a Catalunya", o també: "El president de la Generalitat afirmà que Holanda és un exemple a seguir per al Principat". En tots aquests casos els periodistes haurien emprat l'estil indirecte i probablement cap lector hauria dubtat de la veracitat de la informació si, per exemple, hagués vist el dia anterior per la televisió el president de la Generalitat fent l'afirmació abans esmentada. Car totes les oracions subordinades anteriors semblen reproduir fidedignament el sentit de les paraules del president de la Generalitat, encara que només la primer reprodueix les seves paraules literalment. En altres paraules, allò que tenen en comú les tres clàusules subordinades i que fa que les oracions completes siguin vertaderes és el sentit o pensament expressat per elles. D'aquí que, si el significat d'una expressió -nom propi, enunciat, ...- és

---

[1] *Ibid.*, 151.

aquella entitat respecte a la qual avaluem el valor de veritat dels enunciats en els quals ella figura,[1] haurem de concloure que el significat dels enunciats subordinats anteriors és el pensament expressat per ells.

Malgrat l'elegància i simplicitat de la proposta fregeana, la qual permet explicar d'una forma unificada i més o menys plausible l'anomalia que, des d'un punt de vista semàntic, representen les actituds proposicionals, és evident que no està exempta de dificultats. Una prova d'això la constitueix el fet que les actituds proposicionals han estat un dels principals temes d'estudi i debat en la filosofia del llenguatge contemporani d'ençà que Frege exposa a la comunitat filosòfica els problemes que plantegen i la seva proposta de solució. La dificultat principal és, tal com ha assenyalat Quine en diversos indrets, que no tenim un criteri d'identitat per als sentits -i, en general, per a les intensions-, de manera que no podem decidir quan dues *clàusules-que* expressen el mateix pensament. En efecte, d'acord amb el principi de composicionalitat, el sentit d'un enunciat està determinat unívocament pel sentit de les seves parts components i aquestes són essencialment els noms propis -en els quals Frege inclou les descripcions definides- i els predicats. Per donar raó de la tesi de Quine serà suficient fixar-nos amb la concepció fregeana dels noms propis. Tal com ja sabem, en efecte, d'acord amb aquesta concepció, dos usuaris d'un mateix llenguatge poden associar sentits diferents a un mateix nom propi i, per tant, identificar la denotació d'aquest nom propi a través de descripcions definides diferents. D'aquí se segueix llavors que: 1. Els noms propis, encara que tinguin la mateixa denotació, no són, en general, intercanviables *salva veritate* en les actituds proposicionals. Un nom propi només pot ser substituït per un altre nom propi o per una descripció definida, si el subjecte de l'actitud proposicional associa amb aquell nom el mateix sentit que amb el primer i si la descripció definida explicita aquest sentit. 2. Podríem pensar en el següent criteri d'identitat per als pensaments: Dos enunciats expressen el mateix pensament si, i només si, són intercanviables *salva veritate* en qualsevol context: extensional o intensional. Però, tal com acabem de veure, la concepció fregeana dels noms propis fa impossible en la pràctica decidir quan dos pensaments són idèntics, perquè el sentit atribuït per dos usuaris del llenguatge a un nom propi pot ser diferent i, per tant, també serà diferent el pensament que associïn a un mateix enunciat en el qual figuri aquest nom propi -del qual depèn la veritat o falsedat de l'actitud proposicional en qüestió. 3. Les actituds proposicionals no formen part del llenguatge científic, perquè les expressions d'aquest

[1] Aquesta és en definitiva la concepció del significat que es dedueix del principi de composicionalitat i de la tesi d'identificabilitat, de les quals se segueix immediatament el principi de substitució *salva veritate* leibinizià.

llenguatge -noms propis, enunciats, etc- tenen un únic sentit i aquest és objectiu. Tot just el contrari del que s'esdevé amb les expressions que figuren en les *clàusules-que* de les actituds proposicionals.

3. *Un enunciat d'identitat té valor cognitiu si els noms propis que figuren en ell tenen diferent sentit*. En efecte, quant a la relació d'identitat que ara s'expressa amb el signe " =", Frege conclou que:

> Si trobàvem diferent, en general, el valor cognitiu de "$a = a$" i "$a = b$", això s'aclareix perquè, pel que fa al valor de coneixement, el sentit de les proposicions, és a dir, el pensament expressat en elles, no és menys important que el seu significat, això és, que el seu valor de veritat. Si $a = b$, llavors certament el significat de b és el mateix que el de a i també el valor de veritat de "$a = b$" és el mateix que el de "$a = a$" No obstant això, el sentit de b pot ser diferent del sentit de a i amb això el pensament expressat en "$a = b$" pot ser diferent de l'expressat a "$a = a$".[1]

D'aquí se segueix que, en l'expressió "$a = b$", el signe " =" expressa la identitat dels significats de a i b i, per tant, la relació d'identitat esdevé una relació entre els significats dels signes i no entre els signes mateixos. D'aquesta manera, pot explicar-se la diferència entre el valor o contingut informatiu de "$a = a$" i el de "$a = b$" sense necessitat d'apel·lar a un doble significat dels signes segons figurin o no a l'esquerra i dreta del signe d'identitat. Es possibilita així la integració i desenvolupament de la teoria de la identitat en el llenguatge objecte, tasca que es durà a terme a *Grundgesetze der Arithmetik*.

8. La lògica de *Grundgesetze der Arithmetik*

Els dos volums de *Grundgesetze der Arithmetik* (*1893,1903*), estan dividits de forma no sistemàtica en tres parts. En la primera part,[2] Frege exposa el sistema lògic, anomenat de nou *Begriffschrift.* En la segona part,[3] exposa la teoria dels nombres cardinals,

---

1 *Ibid.*, 162.

2 *Frege 1962 1*, 1-69.

3 *Frege 1962 1*, 70-238 i *Frege 1962 2*, 1-68.

demostrant les seves lleis bàsiques. En la tercera part,[1] exposa la teoria dels nombres reals a partir d'un esquema molt similar a l'emprat per als nombres cardinals a *Grundlagen*, això és, Frege discuteix primer les teories rivals dels seus contemporanis i exposa després la seva pròpia teoria dels nombres reals. Finalment, Frege interromp aquesta exposició i introdueix la paradoxa de Russell en un apèndix [*Nachwort*], de manera que la teoria dels reals resta inacabada. En aquest secció i la següent estudiarem la lògica de *Grundgesetze*, mentre que en les dues darrers seccions estudiarem la seva demostració de les lleis bàsiques de l'aritmètica i farem una anàlisi de la paradoxa de Russell i del seu impacte en el logicisme fregeà.

L'interès de la lògica de *Grundgesetze* es manifesta fonamentalment en els dos aspectes següents: d'una banda, la presentació mateixa d'un sistema lògic que inclou la lògica proposicional, la lògica de primer i segon ordre -i, en el marc d'aquesta última, una teoria de conjunts- i, d'una altra, el desenvolupament d'una acurada interpretació semàntica que acompanya l'exposició d'aquest sistema, la qual suposa ensems una filosofia del llenguatge d'un calat i influència indiscutibles. Com hem dit abans, el sistema lògic s'exposa a la primera part de *Grundgesetze*, que Frege titula de nou *Begriffschrift* i consta ella mateixa de tres parts o seccions. En la primera secció, Frege introdueix els signes primitius de la nova *Begriffschrift*; en la segona secció, fa unes consideracions generals sobre les definicions, exposa una acurada síntesi de la semàntica del sistema lògic introduït a la primera secció i, finalment, introdueix diferents definicions particulars que faran possible l'aplicació d'aquest sistema lògic a la teoria de nombres. En la tercera i última secció, Frege fa un sumari de les lleis bàsiques i les regles d'inferència introduïdes fins aquell moment i en deriva algunes proposicions. En aquest secció analitzarem essencialment la primera secció de *Begriffschrift*, encara que per a la nostra exposició ens servirem d'algunes definicions introduïdes en la segona secció i alguns resultats de la tercera.

En el primer paràgraf de la primera secció de *Begriffschrift*, Frege explica de nou la distinció entre *sentit* i *significat* i introdueix les diferents entitats que es consideraran al llarg de *Begriffschrift* -és a dir, s'exposa l'ontologia de la *Begriffschrift* de *Grundgesetze*: les *funcions* -que inclouen els *conceptes* i les *relacions*- i els *objectes* -que inclouen, entre d'altres, els *valors de veritat*, els *cursos de valor* i les *extensions dels conceptes*. En el segon paràgraf, Frege distingeix entre *judici* i *pensament* i introdueix els diferents signes funcionals: l'*horitzontal*, la *negació*, la *identitat*, la notació per a la *generalitat*, per als *cursos de valors* i per a les *descripcions definides*. D'entre aquests signes funcionals, la única

[1] *Frege 1962 2*, 69-243.

novetat respecte a *Begriffschrift* i els articles de 1891 i 1892 és la introducció del que podríem anomenar *operador per a les descripcions definides*, que explicarem a continuació. En el llenguatge quotidià, les *descripcions definides* es formen prefixant l'article "el" a un concepte. El problema és que d'aquesta manera es poden formar fàcilment descripcions definides que no tinguin cap significat com, per exemple, "l'actual rei de França" o que tinguin més d'un significat com, per exemple, "l'arrel quadrada de 1". L'estratègia de Frege per introduir les *descripcions definides* serà introduir una funció tal que, quan l'argument de la funció sigui una extensió d'un concepte que només té un únic element, llavors la funció tingui com a valor aquest element; altrament el valor de la funció serà el seu mateix argument. Concretament, Frege defineix la funció $\backslash\, \xi$, distingint els dos casos següents:

> 1. Si hi ha un objecte Δ tal que $\dot{\varepsilon}\,(\Delta = \varepsilon)$ és l'argument de la funció, llavors el valor de $\backslash\, \xi$ és Δ mateix.
> 2. Si no hi ha cap objecte Δ tal que $\dot{\varepsilon}\,(\Delta = \varepsilon)$ sigui l'argument de la funció, llavors l'argument mateix serà el valor de $\backslash\, \xi$.[1]

Si tenim en compte que els arguments de la funció $\backslash\, \xi$ són del tipus $\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$, on Φ representa una funció -no necessàriament un concepte-, llavors podríem parafrasejar la definició fregeana de la manera següent:

> 1. Si l'argument de la funció és l'extensió del concepte *és idèntic amb* Δ, *i.e.* si $\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\,(\Delta = \varepsilon)$, per un objecte qualsevol Δ, llavors el valor de la funció $\backslash\, \xi$ és aquest mateix objecte, és a dir, $\backslash\, \dot{\varepsilon}\,(\Delta = \varepsilon) = \Delta$.
> 2. Si l'argument no és una extensió com l'especificada a (1), és a dir, si $\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ no té cap element o en té més d'un, llavors el valor de la funció $\backslash\, \xi$ és el mateix argument $\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$.[2]

Per tant, si sota un concepte $\Phi(\xi)$ hi cau un i només un objecte Δ, llavors $\backslash\, \dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon) = \Delta$, altrament $\backslash\, \dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$. Així, per exemple, $\backslash\, \dot{\varepsilon}\,(\varepsilon + 3 = 5) = 2$, donat que sota el concepte $\xi + 3 = 5$ només hi cau un objecte; però, $\backslash\, \dot{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 = 1) = \dot{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 = 1)$, perquè sota el concepte $\xi^2 = 1$ hi cau més d'un objecte i $\backslash\, \dot{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 = 5) = \dot{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 = 5)$, perquè sota el concepte $\xi^2 = 5$ no hi

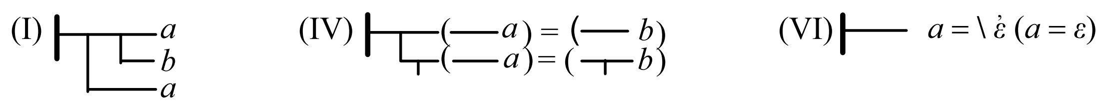
1 *Frege 1962 1*, § 11, 19.

2 La condició 1 dóna lloc a l'axioma VI, que Frege introdueix al final del tercer paràgraf, mentre que la condició 2 assegura que la funció està definida per a tots els objectes.

cau cap objecte; finalment, $\backslash\, \grave{\dot{\varepsilon}} (\varepsilon + 3) = \grave{\dot{\varepsilon}} (\varepsilon + 3)$, perquè $\xi + 3$ no és cap concepte. En el cas del concepte *actual rei de França*, si hi ha una i només una persona que ocupi actualment el tron de França, llavors el valor de "\ (extensió del concepte actual rei de França)" serà aquesta persona; en el cas que no hi hagi cap persona que ocupi actualment el tron de França, llavors el valor de la funció anterior serà el conjunt buit i si, finalment, hi ha més d'una persona que ocupa el tron de França, llavors el valor de la funció serà aquest conjunt de persones. Veiem doncs, que la funció anterior soluciona de forma òbvia l'enigma del *puzzle* russellià relatiu a quin és el significat de l'enunciat "L'actual rei de França és calb", en la mesura que assegura una denotació per a la descripció definida "l'actual rei de França" i, pel principi de composicionalitat, per tot l'enunciat sencer. Aquesta solució, d'una altra banda, respon a l'exigència fregeana que tots els noms propis -i les descripcions definides ho són- tinguin una denotació, però és evident que no és tot el satisfactòria que caldria desitjar, si més no en la mesura que no ofereix una anàlisi lògica convincent de l'enunciat anterior. Com veurem més endavant, encara que la *teoria de les descripcions* de Russell porta a un solució anàloga del *puzzle* anterior al de la funció Frege, a saber, que els enunciats que contenen descripcions definides que no denoten un únic objecte són *falsos*, té el mèrit evident d'oferir una anàlisi lògica força coherent d'aquesta mena d'enunciats (*Cf. infra*, cap. VI, § 8). Cal remarcar finalment que, tal com veurem després, la introducció de l'operador per a les descripcions definides és necessària per a la definició de la relació que és dóna entre un objecte i l'extensió del concepte sota el qual aquell objecte cau -l'equivalent de la relació de *pertinença* moderna. De fet, Frege formula en base a aquesta relació totes les definicions de la segona part de la *Begriffschrift de Grundgesetze* i els teoremes de la segona i tercera part d'aquesta obra, per la qual cosa no ens ha d'estranyar la importància que Frege atorgar a trobar una notació adequada per a les descripcions definides i el fet que introdueixi aquesta notació a partir d'un axioma específic.

En el tercer paràgraf, Frege introdueix els diferents mètodes d'inferència: *modus ponens*, *sil·logisme hipotètic* i *contraposició*, encara que empra constantment una regla d'*intercanvi dels antecedents* i una altra d'*eliminació dels antecedents repetits* que no esmenta com a tals i, en el sumari de les regles de la tercera part, introdueix també la regla de *substitució* i una regla que permet el *canvi alfabètic de lletres gòtiques -variables lligades*. Tot seguit explica la transició de les lletres llatines a les gòtiques -la qual cosa suposa, com ja s'esdevenia en la *Begriffschrift* de 1879, introduir una nova regla, la *generalització*- i explica acuradament el *rol semàntic* de les primeres, introduint a tal efecte una terminologia precisa.

Segons Frege, en efecte: "d'una lletra llatina diem, no que *denota* un objecte, sinó que *indica [andeutet]* un objecte" i, més exactament, que l'"*indica indeterminadament*" *[unbestimmt andeutet]* o *ambiguament*.[1] Per tant, com que Frege anomena *noms* només a aquells signes i combinacions de signes que *denoten quelcom*, les lletres llatines i les combinacions de signes en que figurin no seran noms, sinó que esdevindran noms -propis o de funció- en substituir aquelles lletres per noms. Així, afirma Frege: "una combinació de signes, que conté lletres llatines i que sempre es transforma en un nom propi si reemplacem cada lletra llatina per un nom, l'anomenaré una marca *d'objecte llatina*. I una combinació de signes que conté lletres llatines i que sempre es transforma en un nom de funció si reemplacem cada lletra llatina per un nom, l'anomenaré marca *de funció romana*, o *marca llatina* d'una funció".[2] Així doncs, quan Frege assenyala que les lletres llatines *indiquen ambiguament* un objecte o una funció entén per això que aquestes lletres tenen un rang de valors associat en l'univers fregeà d'objectes i funcions i que, per tant, poden substituir-se per qualsevol nom d'objecte o funció en el seu rang. Les lletres llatines són així l'equivalent de les *variables* de la lògica moderna i, més en concret, de les *variables lliures* del llenguatge objecte. De forma anàloga amb el que s'esdevenia en la *Begriffscrhrift* de 1879, Frege empra a *Grundgesetze* les lletres llatines exclusivament per l'exposició formal del sistema lògic, utilitzant per a la seva exposició informal les lletres majúscules gregues Φ, Ψ, Γ, Δ, ... "com si fossin noms que denoten alguna cosa, encara que no especifico la seva denotació".[3] Es tracta, doncs, de variables que indiquen ambiguament o tenen com a valors els noms de funció o noms propis del llenguatge i, per tant, de variables *sintàctiques* del *metallenguatge* -l'alemany plus les majúscules gregues. Al final del tercer paràgraf, un cop fetes les precisions anteriors, Frege introdueix les tres primeres lleis bàsiques:



En notació moderna:

$$a \rightarrow (b \rightarrow a) \qquad \text{(I)}$$

[1] *Ibid*., § 17, 131 i § 1, 5 respectivament.

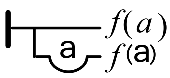
[2] *Ibid*., § 17, 32-33.

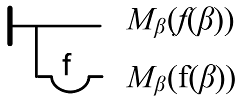
[3] *Ibid*., § 5, 9, n. 3.

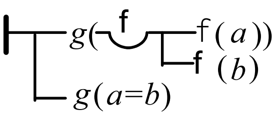
$$\neg(a \leftrightarrow \neg b) \rightarrow (a \leftrightarrow b) \qquad \text{(IV)}$$

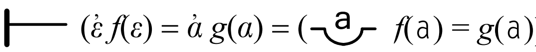
$$y = (\iota\hat{x})(y = x) \qquad \text{(VI)}$$

Evidentment, la gran novetat del grup anterior d'axiomes és la l'axioma VI, la gènesi del qual hem explicat prèviament en explicar la notació fregeana per les *descripcions definides*. Finalment, en el quart paràgraf, amb el qual s'acaba la primera secció de l'exposició de la *Begriffschrift* de *Grundgesetze*, Frege estén la notació per introduir els quantificadors de segon ordre i introdueix la resta de lleis bàsiques:

(IIa) 

(IIb) 

(III) 

(V) 

on *M* és una lletra llatina de funció que indica ambiguament una funció de segon nivell que té com argument una funció de primer nivell indicada per $f(\beta)$ -el subíndex de la lletra *M* té, doncs, com a funció indicar el tipus d'argument de la funció que és l'argument de *M*. Notem també que a la formulació anterior apareixen perfectament indicades les ocurrències lliures i lligades de les lletres mitjançant la utilització de lletres llatines i lletres gòtiques. Podríem expressar els axiomes fregeans en notació moderna de la següent manera:

$$\forall x f(x) \rightarrow f(y) \qquad \text{(IIa)}$$

$$\forall f G(f) \rightarrow G(g) \qquad \text{(IIb)}$$

$$g(x = y) \rightarrow g[\forall f(f(y) \rightarrow f(x))] \qquad \text{(III)}$$

$$\hat{x}f(x) = \hat{x}g(x) \leftrightarrow \forall x(f(x) \leftrightarrow g(x)). \qquad \text{(V)}$$

D'aquesta manera queda exposat en la seva totalitat el sistema lògic de *Grundgesetze* i es tanca la primera secció de la seva *Begriffschrift*. Pel que fa a la relació entre el sistema lògic de *Begriffschrift* de 1879 i el de la *Begriffschrift* de *Grundgesetze*, podríem dir de forma molt resumida que "els nou axiomes de *Begriffschrift* són condensats a través dels primers quatre axiomes de *Grundgesetze*, amb la formulació d'algunes regles addicionals i amb la oficialització de la quantificació de segon ordre".[1] Així, per exemple, els axiomes (7) i (8) de la primera obra són reemplaçats per l'axioma III de *Grundgesetze*, a partir del qual els axiomes anteriors se segueixen fàcilment. Per la seva part, l'axioma (9) de *Begriffschrift* és reemplaçat per l'axioma (IIa) de *Grundgesetze*, juntament amb el qual Frege introdueix un axioma anàleg per a les funcions de segon nivell (IIb).[2] Així doncs, les principals novetats del conjunt d'axiomes presentat per Frege a la *Begriffschrift* de *Grundgesetze* respecte a la *Begriffschrift* de 1879 són els axiomes per a les *descripcions definides* (VI) i els *cursos de valors* (V). Com que l'origen del primer ja ha estat explicat abans, ara explicarem breument l'origen del segon -car tant les seves implicacions a nivell estrictament lògic com el seu import filosòfic s'explicaran a partir de l'anàlisi de la paradoxa de Russell. Tal com havíem vist en la secció anterior, Frege només havia discutit a "Über Sinn und Bedeutung" el sentit i el significat dels noms propis i els enunciats. Però, tal com ell mateix afirma en un *postscript* a l'article anterior, titulat "Ausführungen über Sinn und Bedeutung" ["Aclariments sobre "Sentit i Significat""] (*1892-1895*) i publicat pòstumament, "la mateixa distinció pot ser feta també per a les paraules de concepte [*Begriffworten*]".[3] De fet, la distinció entre sentit i significat per als noms de concepte ja havia estat esbossada per Frege en una carta a Husserl de 24/5/1891 i, per tant, és anterior a la mateixa publicació d'"Über Sinn und Bedeutung". Com ja s'havia esdevingut en aquest article, en l'inèdit de 1892-95 abans esmentat, Frege es preocupa de forma quasi exclusiva per el *significat* dels noms de concepte. Quin és llavors el significat d'aquestes expressions? D'acord amb Frege, "el significat d'un nom propi és l'objecte que designa o anomena. Una paraula de concepte significa un concepte, si la paraula s'empra tal com es fa regularment en lògica".[4] Naturalment, això podria semblar una concessió a aquells que defensen un punt de vista intensional en lògica, però aquesta concessió es mínima, si tenim en compte el punt de vista extensional que té Frege dels conceptes:

> En qualsevol enunciat, les paraules de concepte poden substituir-se mútuament sempre i quan tinguin la mateixa extensió, de manera que, pel que fa a la

---

1 *Frege 1997*, 383.

2 Una bona exposició del sistema lògic de *Begriffschrift* i *Grundgesetze* i de la relació entre ambdós sistemes lògics, es pot trobar en l'apèndix 2 de l'obra citada en la nota anterior, titulat "Frege's Logical Notation" (*Frege 1997*, 376-85)

3 *Frege 1969*, 128.

4 *Ibid*., 128.

> deducció i a les lleis lògiques, els conceptes es comportaran de manera diferent només en la mesura que les seves extensions siguin diferents. La relació lògica fonamental és la de caure un objecte sota un concepte: totes les relacions entre conceptes poden reduir-se a aquesta. Si un objecte cau sota un concepte, cau sota tots els conceptes que tenen la mateixa extensió, d'on se segueix el que hem dit. Per tant, de la mateixa manera que els noms propis d'un mateix objecte poden substituir-se mútuament *salva veritate*, el mateix s'esdevé amb les paraules de concepte, si les seves extensions són les mateixes.[1]

Els conceptes, d'una altra banda, són de "naturalesa predicativa" [prädikative Natur], és a dir, de naturalesa insaturada o incompleta com les funcions en general, tot just al contrari del que s'esdevé amb els objectes -recordem que la distinció radical entre concepte i objecte era un dels tres principis que havien regit la recerca lògica de *Grundlagen* (*Cf. supra*, § 5). D'aquí se segueix que "els objectes i els conceptes són essencialment diferents i no poden substituir-se els uns per els altres" i que "els conceptes no poden estar en les mateixes relacions que els objectes".[2] Per exemple, "la relació d'igualtat, que jo entenc com la completa coincidència o identitat, només pot ser pensada per objectes, no pas per conceptes".[3] Amb tot, continua Frege:

> Encara que la relació d'igualtat només és pensable per a objectes, hi ha una relació semblant per a conceptes, la qual anomeno una relació de segon nivell en la mesura que és una relació entre conceptes, mentre que a la igualtat l'anomeno una relació de primer nivell. Diem que un objecte *a* és igual a un objecte *b* (en el sentit de plena coincidència), si *a* cau sota cada concepte sota el qual cau *b*, i viceversa. Obtindrem quelcom corresponent a això per als conceptes, si intercanviem els rols de conceptes i objectes. Així, podríem dir que la relació considerada més amunt es dóna entre el concepte Φ i el concepte *X* si, tot objecte que cau sota Φ, també cau sota *X*, i viceversa.[4]

Evidentment, una formulació correcta de definició de la relació entre conceptes anàloga a la relació d'igualtat entre objectes -que en el text anterior, Frege defineix de nou a partir de la *llei de Leibniz*-, requereix l'ús de les extensions dels conceptes, que Frege havia

1 *Ibid.*, 128.
2 *Ibid.*, 130.
3 *Ibid.*, 130-31.
4 *Ibid.*, 131.

introduït a "Über Funktion und Begriff", car només a través de la igualtat entre extensions -que, com ja sabem, són un tipus particular d'objectes i, per tant, hom pot aplicar-lis sense cap problema la relació d'igualtat- hom pot fer-se ressò d'una manera precisa del fet que tot objecte que cau sota un concepte cau sota l'altre i viceversa. Així, una mica més endavant, Frege proposa la següent definició: "el que dues paraules de concepte signifiquen és el mateix, si i només si, les extensions dels corresponents conceptes coincideixen".[1] Però això no és més que una versió en prosa de l'axioma V de *Grundgesetze*. Això és interessant, des del nostre punt de vista, perquè corregeix una mica el punt de vista tradicional segons el qual l'axioma V tindria com a únic o principal objectiu la introducció de les extensions a partir dels conceptes. De fet, tal com acabem d'argumentar, Frege introdueix per primera vegada aquest axioma per tal de definir la relació d'"igualtat" entre conceptes, de forma anàloga a com s'havia definit la relació entre objectes. De la mateixa manera, en efecte, que dos objectes són iguals quan poden substituir-se mútuament *salva veritate*, dos conceptes seran "iguals" quan puguin substituir-se *salva veritate*, això és, quan les seves extensions siguin les mateixes. En definitiva, la reducció de l'aritmètica a la lògica es duu a terme en el marc d'una lògica de segon ordre que inclou, com hem explicat abans, una teoria de conceptes (*Cf. supra*, § 3), per la qual cosa a Frege li cal establir un criteri d'identificació per als conceptes de tipus extensional. En qualsevol cas, tal com veurem de seguida, la introducció dels nombres *qua* objectes lògics requereix que aquests es vegin com extensions de conceptes i, això fa que el rol essencial de l'axioma V sigui la introducció d'aquestes.

Frege, en efecte, introdueix a *Grundgesetze* els cursos de valors i, en particular, les extensions dels conceptes, a través de l'axioma V. Per veure això, remarquem en primer lloc que, en el cas especial en què les funcions f i g són els conceptes F i G, tenim la següent versió de l'axioma V:

$$\hat{x}Fx = \hat{x}Gx \leftrightarrow (\forall x)(Fx \leftrightarrow Gx).$$[2]

---

1 *Ibid.*, 133.

2 Frege no expressa a nivell de notació la distinció entre funcions i conceptes i la distinció corresponent entre cursos de valors i extensions i, per tant, formula tots els axiomes, definicions i teoremes per a funcions i cursos de valors en general, encara que en els exemples i comentaris en llengua vernàcula faci referència sovint a la versió corresponent en termes de conceptes i extensions. Però aquesta distinció a nivell notacional és important de cara a facilitar la comprensió de com sorgeix la contradicció a partir de l'axioma V i, per tant, nosaltres distingirem d'ara en endavant entre funcions i conceptes de la manera indicada i formularem els axiomes, definicions i teoremes *Grundgesetze* en la seva versió per a conceptes i extensions.

Doncs bé, de l'axioma anterior se segueix fàcilment el següent corol·lari:

$$\forall F \exists y(y = \hat{x}Fx)$$

Frege no demostra aquest corol·lari, però juga un paper molt important en la demostració de la contradicció a partir de l'axioma V (*Cf. infra*, § 10), en la mesura que afirma que tot concepte té la seva extensió i, per tant, assegura l'existència d'una extensió per qualsevol mena de concepte. Frege, en canvi, si que demostra a partir de l'axioma V que:

$$Fy \leftrightarrow y \in \hat{x}Fx,$$

sense limitació sobre F o y.[1] Per tant, és té la següent llei:

$$\forall F \forall y(Fy \leftrightarrow y \in \hat{x}Fx),$$

la qual determina completament l'extensió del concepte F, *i.e.* la classe $\hat{x}Fx$, per la qual cosa s'anomena sovint la *llei d'extensions*. A partir de l'axioma V es pot demostrar també fàcilment l'anomenat sovint *principi d'extensionalitat*, que podríem formular així:

$$\exists F(x = \hat{z}Fz) \wedge \exists G(y = \hat{z}Gz) \rightarrow [\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y].$$

Veiem, doncs, que l'axioma V permet introduir les extensions a partir dels conceptes, determina completament l'extensió d'un concepte i dóna un criteri per a la identificació de dues extensions. En els enunciats anteriors, hem introduït el signe $\in$ per expressar la relació que es dóna entre un objecte i l'extensió d'un concepte sota el qual aquell objecte cau. Frege denota aquesta relació mitjançant el signe $\frown$, que defineix de la següent manera:

$$a \frown u \equiv \iota\hat{a}[\exists G(u = \hat{x}Gx \wedge Ga)].^{2}$$

Tal com dèiem abans, Frege formula en base a aquesta relació totes les definicions de la segona part de *Begriffschrift* i els teoremes de la segona i tercera part de *Grundgesetze*;

[1] *Frege 1962 1*, §§ 54-55, 70-75.

[2] *Ibid.*, § 34, 53.

d'aquí la seva importància. Com podem veure en la definició anterior, Frege treu profit de la quantificació de segon nivell i de l'operador per a les descripcions definides prèviament introduïts. En qualsevol cas, des d'un punt de vista modern, el recurs a aquest operador és una complicació innecessària, per la qual cosa podríem reemplaçar la definició anterior per la definició següent, equivalent a ella i més fàcil de llegir:

$$a \frown u \equiv \exists G(u = \hat{x}Gx \wedge Ga).$$

9. La semàntica de *Grundgesetze der Arithmetik*: la jerarquia de funcions

En aquesta secció exposarem alguns dels detalls de la semàntica exposada per Frege en la segona secció de la *Begriffschrift* de *Grundgesetze*, fent-nos ressò especialment de la semàntica dels diferents signes de funció introduïts en la primera secció i, en particular, del tipus més important de signes d'aquesta mena: els *quantificadors*. Des del punt de vista semàntic, l'interès fonamental de *Grundgesetze* rau en què en aquesta obra Frege recull les aportacions principals de "Funktion und Begriff" i "Über Sinn und Bedeutung" en el marc d'una teoria semàntica estructurada i completa -almenys en el sentit que intenta donar raó d'un sistema lògic que, tal com hem dit abans, abasta tant la lògica proposicional com la lògica de primer i segon ordre. Com veurem de seguida, això farà que, d'una banda, Frege introdueixi noves categories lingüístiques que el permetran una anàlisi més acurada dels conceptes introduïts en els articles de 1891 i 1892 abans esmentats i, d'una altra, que ampliï la doctrina del sentit i el significat. Recordem, en efecte, que Frege diferenciava a "Funktion und Begriff" entre *funció* i *objecte* a partir del fet que la funció era *no-saturada* i l'objecte era *saturat* -no tenia cap lloc buit-, i a "Über Sinn und Bedeutung" exposava la doctrina del *sentit* i el *significat*, aplicada exclusivament als *noms propis* i als *enunciats*, és a dir, a aquelles expressions que denoten objectes; però que, tant en una carta a Husserl de 1891 com en un article inèdit de 1892-95, Frege havia afirmat la necessitat d'estendre també la distinció anterior als noms de funció i, en particular, als noms de concepte. Doncs bé, el que farà Frege a *Grundgesetze* serà sistematitzar la semàntica que es dedueix dels escrits anteriors. En aquest sentit, podríem dir que les novetats principals de *Grundgesetze* en relació a "Über Sinn und Bedeutung" són la introducció, al costat dels *noms propis* -en els quals s'inclouen ara els *enunciats*- dels *noms de funció* i l'afirmació -com a correlat de la tesi segons la qual els noms propis denoten *objectes*- de la tesi segons la qual els noms de funció denoten *funcions*. Així, a la distinció que es dóna a nivell lingüístic entre *noms propis* i *noms de funció* -caracteritzats respectivament com a *complets* i *incomplets*- li correspon a nivell ontològic la distinció entre els *objectes* i *funcions* denotats per aquells -caracteritzats respectivament com a *saturats* i *no-saturats*.[1] Veiem, doncs, que les novetats principals de *Grundgesetze* giren entorn del concepte de funció. Això és degut, no només a la insuficiència de l'anàlisi semàntica d'aquest concepte a "Funktion und Begriff" i "Über Sinn und Bedeutung", sinó també al paper fonamental que juga el concepte de funció en el desenvolupament de la lògica de *Grundgesetze* -tan a nivell proposicional com quantificacional, tal com es desprèn de l'enumeració dels signes funcionals realitzada a la secció anterior. En els paràgrafs següents, centrarem el nostre estudi en la semàntica dels signes funcionals que apareixen en la *Begriffschrift* de *Grundgesetze* i, en especial, d'aquells necessaris per desenvolupar la lògica de primer i segon ordre, donat que és aquí precisament on es presenten les novetat més importants a nivell lògic.

En la conferència "Funktion und Begriff" Frege havia mostrat com, a partir d'expressions com ara "$2.1^3 + 1$" o "la capital de l'imperi alemany", s'obtenien expressions de funcions com ara "$2.x^3 + x$" o "la capital de *x*" (*Cf. supra*, § 6). A *Grundgesetze* Frege donarà raó d'aquest procediment a través de la distinció abans esmentada entre *noms propis* i *noms de funció*. En primer lloc, assenyala Frege, "anomeno un nom propi, o nom d'un objecte, a un signe, ja sigui simple o compost, el qual ha de significar un objecte".[2] Els noms propis compostos són aquells noms propis que tenen un nom propi com a constituent o part pròpia. Així, per exemple, les expressions "$2.1^3 + 1$" o "la capital de l'imperi alemany" són noms propis compostos donat que denoten respectivament el nombre 4 i la ciutat de Berlin i tenen com a constituents, per exemple, els noms propis "2.1^3", " 1" i "l'imperi alemany". I, d'aquests, només "1" és un nom propi simple. Doncs bé, assenyala Frege, "si d'un nom propi trèiem un nom propi que constitueixi una part seva o coincideixi amb ell, en alguns o tots el llocs on es presenti, però de manera que aquests llocs romanguin reconeixibles com a susceptibles de ser omplerts amb un qualsevol i el mateix argument (com *llocs argumentals de primer tipus*), llavors anomeno això que obtenim d'aquesta manera, *nom* d'una funció de

1 Adoptem la convenció d'emprar l'adjectiu *complet* per caracteritzar els *noms propis* i l'adjectiu *saturat* per caracteritzar el seu *significat*, encara que Frege utilitza indistintament ambdós termes per caracteritzar tant els uns com els altres. I el mateix s'esdevé naturalment amb els adjectius *incomplet* i *no saturat* respecte dels *noms de funció* i els seus *significats*.

2 *Ibid.*, § 26, 43.

primer nivell amb un argument. Un nom d'aquests, juntament amb un nom propi que ompli el lloc argumental, constitueix un nom propi".[1] Així, per exemple:

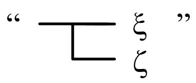
"$2.\xi^3 + \xi$" i "la capital de ζ"

són noms de funció de primer nivell, obtinguts a partir dels noms propis "$2.1^3 + 1$" i "la capital de l'imperi alemany", en els quals les lletres ξ , ζ , ... indiquen llocs argumentals de primer tipus, és a dir, llocs argumentals que poden ser omplerts exclusivament amb noms d'arguments de primer tipus -això és, amb noms d'objectes. A partir dels noms de funció de primer nivell, s'obtenen de forma completament anàloga, els noms de funció de primer nivell amb dos arguments. En la *Begriffschrift* de *Grundgesetze* hi apareixen els següents:

1. Noms primitius de funció de primer nivell amb un argument:

"—┬— ξ"   "—— ξ"   "$\backslash\, \xi$"

2. Noms primitius de funció de primer nivell amb dos arguments:



"$\xi = \zeta$"

D'acord amb el que hem explicat abans respecte a les majúscules i les consonants gregues, els noms "$\Phi(\xi)$" i "$\Phi(\xi,\zeta)$" tindran com a valors tots els noms de funció de primer nivell i, en particular els noms primitius esmentats a 1 i 2. És interessant observar també que les funcions denotades per tots aquests noms primitius, llevat de " $\backslash\, \xi$ ", tenen sempre valors de veritat com a valors, això és, són respectivament conceptes o relacions. Consegüentment, hom els pot anomenar també "noms de concepte de primer nivell" i "noms de relació de primer nivell".

El pas següent és considerar els noms de funció l'argument de la qual sigui una funció de primer nivell. Així, assenyala Frege: "Si d'un nom propi traiem un nom de funció de primer nivell que constitueixi una part seva, en tots o en alguns dels llocs on es presenti, però de manera que aquests llocs romanguin reconeixibles com susceptibles de ser omplerts amb

[1] *Ibid.*, § 26, 43.

un qualsevol i el mateix nom d'una funció de primer nivell (com *llocs argumentals de segon o tercer tipus*), llavors anomenem això que obtenim d'aquesta manera, *nom* d'una funció de segon nivell amb un argument de segon o tercer tipus, segons els llocs siguin de segon o tercer tipus".[1] És a dir, els noms de funció de segon nivell són aquells els llocs argumentals dels quals admeten només noms de funcions de primer nivell d'un o dos argument -segons siguin llocs argumentals de segon o tercer tipus. Així, per exemple:

"$\phi(2)$" i "ψ(l'imperi alemany)"

són noms de funció de segon nivell, obtinguts també a partir dels noms propis "$2.1^3 + 1$"i "la capital de l'imperi alemany". També són noms de funció de segon nivell -i, en particular, noms de concepte de segon nivell- els noms

"$\phi(2)$" i "ψ(Sòcrates)"

obtinguts a partir de les proposicions "2 = 2" i "Sòcrates és savi". I, en base a aquest darrer tipus de noms propis hom pot encara considerar un tipus específic de noms propis, a saber, les *generalitzacions* com, per exemple, "Tot objecte és igual a si mateix" i "Tot home és savi" -o, com diria Frege, "Tot objecte, si és home, és savi"-, a partir dels quals hom pot obtenir un nou tipus de noms de conceptes de segon nivell com, per exemple:

"$\neg\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$" i "$\neg\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\begin{array}{l}\!\!\top\!\!-\ \psi(\mathfrak{a}) \\ \ \llcorner\ \phi(\mathfrak{a})\end{array}$".

En la *Begriffschrift* de *Grundgesetze* hi trobem els següents:

3. Noms primitius de funció de segon nivell amb un argument de segon tipus:

"$\neg\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\ \phi(\mathfrak{a})$" i "$\dot{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon)$"

4. Noms primitius de funció de segon nivell amb un argument de tercer tipus:[2]

---

[1] *Ibid.*, § 26, 43-44.

[2] Frege no inclou aquests noms a la seva llista dels noms primitius de funció (*Cf. ibid.*, § 31, 48); però, tal com veurem de seguida, entre els noms primitius de funció de tercer nivell, hi inclou

$$\text{“}\,-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\!\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\!-\,\phi(\mathfrak{a},\mathfrak{e})\text{”} \quad \text{i} \qquad\qquad \text{“}\dot{\alpha}\dot{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon,\alpha)\text{”}$$

En les expressions anteriors, les lletres ϕ, ψ, ... indiquen llocs argumentals de segon o tercer tipus, és a dir, llocs que només poden ser omplerts amb noms d'arguments de segon o tercer tipus, *i.e.* noms de funció de primer nivell d'un o dos arguments respectivament. Així, per exemple, "$\dot{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon)$" representarà el nom del curs de valors d'una funció qualsevol $\Phi(\xi)$ i, per tant, "$\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$" denotarà el valor de "$\dot{\varepsilon}\,\phi(\varepsilon)$" per l'argument $\Phi(\xi)$, és a dir, el nom del curs de valor de la funció $\Phi(\xi)$. Anàlogament, "$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\,\Phi(\mathfrak{a})$" denotarà el valor de "$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\,\phi(\mathfrak{a})$" per l'argument $\Phi(\xi)$ i, per tant, tindrà com a valor -indicarà ambiguament- el nom d'un valor de veritat, és a dir, una proposició. Així, per exemple, si reemplacem $\Phi(\xi)$ per $\xi^2 = 4$ i $\xi = \xi$ a "$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\,\Phi(\mathfrak{a})$" obtindrem

$$\text{“}\,-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\,\mathfrak{a}^2 = 4\,\text{”} \qquad \text{i} \qquad \text{“}\,-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\text{”},$$

que són noms respectivament del fals i el vertader. Centrant la nostra anàlisi en aquest darrer tipus de noms de funció de segon nivell, que són sens dubte els més interessants de cara a la interpretació de la lògica quantificacional de *Grundgesetze*, cal assenyalar, en primer lloc, que la interpretació de "$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\,\phi(\mathfrak{a})$" com a nom de funció de segon nivell, coincideix amb la definició que Frege dóna del mateix signe funcional en introduir la notació per a la generalitat:

> ""$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\,\Phi(\mathfrak{a})$" significa el vertader si el valor de la funció $\Phi(\xi)$ és per tot argument el vertader, altrament significa el fals".[1]

Aquesta definició és equivalent a la següent que mostra, d'una altra banda, el caràcter *objectual* o *referencial* de la interpretació fregeana de la quantificació universal a *Grundgesetze*:

---

aquells que tenen arguments del tipus $\Omega_{\beta\gamma}\phi(\beta,\gamma)$, això és, conceptes de segon nivell amb un argument de tercer tipus i, per tant, cal que introduïm també aquests conceptes com a noms primitius.

[1] *Ibid.*, § 8, 12.

““‘$\lnot\!\overset{a}{\smile}\!-\ \Phi(a)$ ” significa el vertader si sota el concepte denotat per ”$\Phi(\xi)$”
queda subsumit tot objecte”.

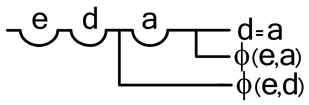
Així doncs, des d’un punt de vista semàntic, $\lnot\!\overset{a}{\smile}\!-\ \phi(a)$ és un *concepte de segon nivell*, el valor del qual és el vertader quan $\Phi(\xi)$ és un concepte de primer nivell sota el qual queda subsumit tot objecte, això és, quan $\Phi(\xi)$ és sempre vertader. Altrament, el valor de $\lnot\!\overset{a}{\smile}\!-\ \phi(a)$ és el fals. És important remarcar que aquesta especificació de les condicions de veritat d’un enunciat quantificat universalment és una clara anticipació de les condicions de veritat estipulades per Tarski per al mateix tipus d’enunciat. Des d’un punt de vista sintàctic, un quantificador universal $\lnot\!\overset{a}{\smile}\!-\ \phi(a)$ és un nom de funció de segon nivell $\Omega_{\beta}(\phi(\beta))$, on $\phi(\ )$ fa reconeixible un lloc argumental que ha de ser omplert per una funció de primer nivell i β representa el lloc argumental d’aquesta darrer funció. La notació anterior suggereix llavors que el quantificador universal és, des d’un punt de vista sintàctic, un operador que lliga una variable que té com a rang els possibles arguments del concepte de primer nivell $\Phi(\xi)$. Anàlogament, el quantificador $\lnot\!\overset{a}{\smile}\!\!\!-\!\overset{e}{\smile}\!-\ \phi(a,e)$ és, des d’un punt de vista semàntic, un concepte de segon nivell, el valor del qual és el vertader quan $\Phi(\xi,\zeta)$ és una relació de primer nivell sota la qual queda subsumida tot objecte i, des d’un punt de vista sintàctic, un nom de funció de segon nivell $\Omega_{\beta\gamma}(\phi(\beta,\gamma))$, això és, un operador que lliga les variables que tenen com a rang els possibles arguments de les relacions de primer nivell $\Phi(\xi,\zeta)$. Tota la resta de noms de funció o concepte de segon nivell amb un argument de segon o tercer tipus que apareixen a la *Begriffschrift* de *Grundgesetze* es generen a partir dels anteriors i els noms primitius de funció de primer nivell -amb un o dos arguments. Així, per exemple:

$$“\ \top\!\overset{a}{\smile}\!\top\ \phi(a)\ ” \qquad\qquad \text{i} \qquad\qquad “\ \lnot\!\overset{a}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\!\!\overline{\quad\ \ }\,\psi(a)\\ \ \ \llcorner\!\!-\,\phi(a)\end{array}\ ”$$

son noms de conceptes de segon nivell amb un argument de segon tipus que tenen com arguments el concepte i la relació respectivament:

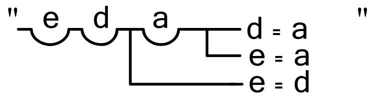
$$-\!\!\top\ \Phi(\xi) \qquad\qquad \text{i} \qquad\qquad \begin{array}{l}\overline{\quad\ \ }\,\Psi(\zeta)\\ \ \ \llcorner\!\!-\,\Phi(\zeta)\end{array}$$

El primer nom de concepte és especialment important, perquè Frege expressa amb ell les proposicions existencials. Mitjançant el segon nom de concepte expressa la subordinació entre conceptes o, el que és el mateix, les proposicions universals afirmatives de la lògica aristotèlica. Un nom de concepte de segon nivell de tercer tipus de particular importància en el desenvolupament de la segona part de *Grundgesetze* és

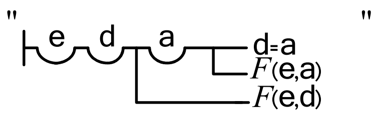


,

el qual denota un concepte sota el qual queden subsumides totes les relacions *funcionals*. Així, per exemple, si prenem com argument la relació $\xi^2 = \zeta$ obtenim com a valor del nom anterior, el nom:

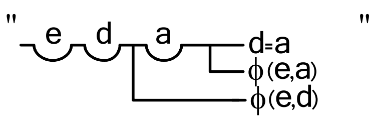


que denota el vertader. Així doncs, la interpretació fregeana de lògica quantificacional que es desprèn del que hem dit fins aquí és la següent: La lògica de primer ordre seria la teoria general de les funcions d'un o més arguments de primer nivell, això és, la teoria que recull les propietats de totes les funcions i conceptes de primer nivell. Així, els teoremes de la lògica de primer ordre afirmaran de cada funció o concepte de primer nivell que satisfan una certa condició de segon nivell, això és, que totes les funcions de primer nivell queden subsumides en un concepte de segon nivell. Així, per exemple, el teorema:



,

afirma que tota funció $F(\zeta, \xi)$ de dos arguments cau sota el concepte de segon nivell:



.

En la *Begriffschrift* de *Grundgesetze* hi trobem, finalment, els següents:

5. noms primitius de funció de tercer nivell:

“ $\neg\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!-\ \mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))$ ” “ $\neg\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!-\ \mu_{\beta\gamma}(\mathfrak{f}(\beta,\gamma))$ ”

En el primer cas, “ $\neg\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!-\ \mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))$ ” és un concepte de tercer nivell que és vertader quan el seu argument, el concepte de segon nivell $\Omega_{\beta}\phi(\beta)$, pren com a valor el vertader per qualsevol funció $\Phi(\xi)$ de primer nivell -això és, quan $\Omega_{\beta}\phi(\beta)$ és un concepte de segon nivell sota el qual queda subsumida tota funció de primer nivell. Altrament, “ $\neg\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!-\ \mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))$ ” és el fals. Un concepte d’aquesta mena és, per exemple, aquell en què l’argument $\Omega_{\beta}\phi(\beta)$ és el concepte de segon ordre “ $\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \phi(\mathfrak{a})$ ”. Així:

$$“\ \neg\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{f}(\mathfrak{a})\ ”,$$

és el nom d’un concepte de tercer nivell, el valor del qual és òbviament el fals. Per la seva banda, $\neg\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!-\ \mu_{\beta\gamma}(\mathfrak{f}(\beta,\gamma))$ és un concepte de tercer nivell que té com argument el concepte de segon nivell $\Omega_{\beta\gamma}\phi(\beta,\gamma)$, el qual pot prendre com argument qualsevol relació $\Phi(\xi,\zeta)$ de primer nivell. Un concepte d’aquesta mena és, per exemple:

$$“\ \neg\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\!\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\!-\ \mathfrak{f}(\mathfrak{a},\mathfrak{e})\ ”,$$

que és també, evidentment, un nom del fals. Com és manifest a partir dels exemples anteriors, els noms primitius de funció de tercer nivell permeten introduir en el sistema lògic la quantificació de segon ordre, això és, la quantificació sobre funcions de primer ordre. Frege no introdueix noms primitius de funció d’un nivell superior, perquè les definicions que després donarà dels conceptes aritmètics requereixen com a molt la utilització de conceptes de tercer nivell, això és, el que avui en dia anomenem quantificació de segon ordre. D’aquí també que els axiomes postulats en la primera secció de la *Begriffschrift* de *Grundgesetze* només donin raó de la quantificació de primer i segon ordre. Cal observar, amb tot, que hom podria estendre fàcilment la jerarquia de funcions anterior per tal de donar raó de la quantificació d'ordre superior, amb la qual cosa hom obtindria quelcom molt semblant a la jerarquia de funcions de la *teoria simple de tipus* de Russell. Pel que fa la lògica de primer ordre, cal observar també que els dos noms primitius de conceptes de segon nivell a través dels quals Frege introdueix els quantificadors de primer ordre només són suficients per introduir la lògica quantificacional monàdica i diàdica, però és evident que hom podria considerar també conceptes de segon nivell que tinguessin com a possibles arguments relacions de primer nivell de qualsevol aritat, amb la qual cosa hom estendria el sistema lògic de *Grundgesetze* per tal que inclogués la lògica quantificacional poliàdica.

10. La filosofia de les matemàtiques de *Grundgesetze der Arithmetik*

En aquesta secció ens farem ressò de les definicions més importants de la tercera secció de la *Begriffschrift* de *Grundgesetze* i explicarem les línies mestres de la reducció de l'aritmètica a la lògica duta a terme per Frege en la segona part de *Grundgesetze* i, en concret, de la demostració fregeana de les lleis bàsiques de l'aritmètica que dóna títol a l'obra i que, com ja sabem, Frege ja havia esbossat informalment a *Grundlagen*. En la secció següent estudiarem la paradoxa de Russell, l'intent fallit de Frege per solucionar-la i la seva repercussió en el desenvolupament del programa logicista de Frege i en la valoració posterior dels resultats assolits per Frege a *Grundgesetze*. En les primeres línies de *Grundgesetze*, Frege assumeix el programa logicista de *Grundlagen* en els termes següents:

> En el meu *Grundlagen der Arithmetik*, vaig intentar fer versemblant que l'aritmètica és una branca de la lògica i no necessita extreure cap argument ni de l'experiència ni de la intuïció. Doncs bé, això es demostrarà en aquest llibre, deduint-se les lleis més simples dels nombres amb mitjans exclusivament lògics.[1]

Com ja havia fet a *Grundlagen*, Frege deriva primer el principi de Hume a partir de la definició explícita de nombre i, després, a partir d'ell, deriva les "lleis més simples dels nombres" a les quals fa referència el text anterior, això és, les *lleis bàsiques de l'aritmètica*

[1] *Frege 1962 1*, 1.

que donen títol a l'obra. Ara bé, a diferència del que s'esdevenia en aquella obra, Frege apel·la a *Grundgesetze* a les extensions no solament en la demostració del principi de Hume a partir de la definició explícita de nombre, sinó també en la demostració de les lleis bàsiques de l'aritmètica a partir d'aquest principi. La raó d'això és que Frege disposa a *Grundgesetze* de l'axioma V que, en el cas particular dels conceptes, hem simbolitzat abans de la següent manera:

$$\hat{x}Fx = \hat{x}Gx \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx).$$

Com ja sabem, l'objectiu fonamental d'aquest axioma és precisament justificar el recurs a les extensions en les demostracions abans esmentades (*Cf. supra*, § 8). Ara bé, a diferència del que s'esdevé en la demostració del principi de Hume a partir de la definició explícita de nombre, hom pot prescindir totalment de les extensions en la demostració dels axiomes de l'aritmètica a partir d'aquest principi. El motiu d'això és que, en aquestes demostracions, Frege empra els cursos de valors i, en particular, les extensions, per substituir les funcions de primer nivell per objectes i poder així reduir el nivell o ordre de les funcions de segon nivell. En efecte, segons Frege:

> En ulteriors desenvolupaments, en lloc de funcions de segon nivell, podríem emprar funcions de primer nivell [...] això és possible representant les funcions que apareixen com arguments de funcions de segon nivell a través dels seus cursos de valors [*Werthverläufe*].[1]

Els motius pels quals Frege hauria volgut emprar funcions de primer nivell en comptes de funcions de segon nivell són probablement la simplificació que d'aquesta manera s'assoleix de nombroses proves i de la notació emprada -en particular, Frege evita així la quantificació de tercer nivell. Ara bé, és evident que l'ús d'extensions en el sentit que acabem d'explicar és clarament un ús no essencial i clarament eliminable.[2] Això accentua, sens dubte, el paral·lelisme entre la demostració a *Grundlagen* dels axiomes de l'aritmètica a partir del principi de Hume i la seva demostració a *Grundgesetze* i justifica alhora la reconstrucció de

---

[1] *Ibid.*, § 34, 52.

[2] La jerarquia de funcions i conceptes de la *Begriffschrift* de *Grundgesetze* ens permet, en efecte, "tornar enrera", és a dir, reformular totes les ocurrències d'extensions o cursos de valors a través dels conceptes o funcions del diferents nivells originaris, els quals constitueixen el veritable esquelet lògic de la *Begriffschrift* de *Grundgesetze*.

la demostració del *teorema de Frege* a *Grundgesetze* a partir de la lògica de segon ordre, la mateixa lògica que subjau a les demostracions de *Begriffschrift* i *Grundlagen*. Això ens permetrà, en suma, exposar els trets essencials de la demostració a *Grundgesetze* de les lleis bàsiques de l'aritmètica a partir del principi de Hume, tot emprant els mateix llenguatge que hem emprat per exposar la teoria de sèries de *Begriffschrift* i desenvolupar a nivell formal l'esbós informal d'aquesta demostració realitzat per Frege a *Grundlagen*.

Per enunciar formalment el principi de Hume, Frege introdueix Func(R) (§ 37), de forma anàloga a com havia fet ja a *Begriffschrift*, i les següents definicions (§§ 39 i 38, respectivament):

(i) $\mathrm{Conv}(R)(x,y) \equiv Ryx$

(ii) $\mathrm{Map}(R)(Fx, Gy) \equiv \mathrm{Func}(R) \wedge \forall x(Fx \to \exists y(Rxy \wedge Gy))$

és a dir, (i) la *conversa* de R i (ii) R *aplica* els Fs en els Gs. Si expressem com abans "el nombre de Fs" per $N[x: Fx]$, podem enunciar el principi de Hume en els següents termes:

$$N[x : Fx] = N[x : Gx] \equiv \exists R[\mathrm{Map}(R)(F,G) \wedge \mathrm{Map}(\mathrm{Conv}(R))(G,F)],$$

definició equivalent a l'enunciada informalment a *Grundlagen*. A partir d'aquest principi hom pot demostrar els següents teoremes:

(1) $\mathrm{Fin}0$

(2) $\forall x(\mathrm{Fin}x \to \exists y(\mathrm{Fin}y \wedge P(x,y))$

(3)$\neg\exists x(P(x,0))$

(4) (a) $\mathrm{Func}(P)$
(b) $\mathrm{Func}[\mathrm{Conv}(P)]$

(5) $\forall x\{\mathrm{Fin}x \to \forall F[F0 \wedge \forall x(\mathrm{Fin}x \wedge Fx \to \forall y(P(x,y) \to Fy)) \to Fx]\}$,

on

$(i)\ 0 = N[x : x \neq x]$

$(ii)\ P(m,n) \equiv \exists F \exists x[Fx \wedge n = Nz : Fz \wedge m = Nz : (Fz \wedge z \neq x)]$

$(iii)\ \mathrm{Fin}n \equiv P^{*}_{=}(0,n)$[1]

$(iv)\ Q^{*}_{=}(a,b) \equiv Q^{*}(a,b) \vee a = b,$

definicions que coincideixen exactament amb les de *Begriffschrift* i *Grundlagen* estudiades en les seccions anteriors (*Cf. supra*, §§ 3 i 5). Els teoremes (1)-(5) són evidentment els axiomes de Peano-Dedekind per a l'aritmètica. Els axiomes (1) i (5) se segueixen immediatament de la definició de nombre finit.[2] Els axiomes (2) i (3) són respectivament els teoremes 155 i 108 de *Grundgesetze*. Finalment, els axiomes (4)(a) i (4)(b) ocupen les seccions B(eta) i Γ. Hom podria pensar aleshores que Frege entenia les lleis bàsiques de l'aritmètica que donen títol a la seva *magnum opus* com aquelles lleis a partir de les quals totes les altres lleis de l'aritmètica se segueixen, és a dir, com un conjunt d'axiomes per l'aritmètica. D'aquesta manera, la demostració en termes estrictament lògics d'aquestes lleis bàsiques seria suficient per demostrar que l'aritmètica és una part de la lògica. Però és molt dubtós que Frege pensés la demostració de la tesi logicista en els termes que acabem d'exposar, més propis de la mentalitat axiomàtica predominant a la lògica contemporània d'ençà Hilbert, la qual Frege no compartia (*Cf. infra*, cap. VIII, § 3). S'ha de tenir en compte, en efecte que quan Frege escriví *Grundlagen* (1884), Dedekind encara no havia publicat *Was sind ?* (1888), obra en la qual presenta la seva coneguda axiomatització de l'aritmètica. En canvi, la publicació dels dos volums de *Grundgesetze* (1893, 1903) és posterior a l'obra de Dedekind i Frege es refereix a ella a la introducció del primer volum de la seva obra. Més encara, tal com acabem de veure, el mateix Frege demostrà efectivament els axiomes de

---

1 Frege no defineix "*n* és un nombre finit", però llegeix de nou $P^{*}_{=}(0,n)$ com "*n* és un nombre finit".

2 S'ha de dir, amb tot, que Frege no demostra exactament (1) i (5) sinó (*i*) *Z*0, *i.e.* "0 és un nombre", la qual cosa se segueix immediatament de les definicions de 0 i del concepte de nombre, i (*ii*) el teorema d'inducció generalitzada de *Begriffschrift* (teorema 152 de *Grundgesetze*), el qual se segueix llavors de la definició de l'ancestral feble. Notem, doncs, que només l'axioma (2) requereix la definició de nombre natural o finit.

Peano-Dedekind a *Grundgesetze.* Ara bé, Frege no afirma en cap moment que aquests principis siguin suficients per demostrar tota la resta de proposicions de l'aritmètica, ni tampoc els considera d'una forma distingida i unificada, això és, com un conjunt d'axiomes a partir dels quals hom pugui deduir totes les veritats de l'aritmètica. De fet, tal com ha assenyalat Dummett, "Frege no va fer això, perquè no tenia cap raó per estar interessat en distingir el que pertanyia a la teoria de nombres de la seva fonamentació lògica, precisament perquè creia que no hi havia una línia clara de separació entre l'aritmètica i la lògica".[1] Així doncs, no sembla adequat, afirmar que Frege intentés demostrar que l'aritmètica és una branca de la lògica tot demostrant en termes estrictament lògic un conjunt d'axiomes suficient per a l'aritmètica. Més aviat la idea de Frege era, com ho serà més tard la de Russell i Whitehead, la de demostrar en termes lògics el major nombre possible de teoremes de l'aritmètica per així obtenir una mena de prova experimental de la possibilitat de reduir-la a la lògica.[2] En aquest sentit, centrar les anàlisis de *Grundlagen* o *Grundgesetze* en la demostració del teorema de Frege tingui potser més interès per a una reconstrucció neologicista del pensament de Frege, que no pas per una reconstrucció històrica del mateix. De fet, els axiomes de Peano-Dedekind no constitueixen l'única "axiomatització" de l'aritmètica que podem trobar a *Grundgesetze*. Un important teorema demostrat a la segona part del primer volum de *Grundgesetze* és el teorema 263:

$$\mathrm{Func}(Q) \wedge \forall x[Gx \leftrightarrow Q^{*}_{=}(a,x)] \wedge \neg\exists x Q^{*}(x,x) \wedge \forall x[Gx \rightarrow \exists y Q^{*}_{=}(x,y)] \rightarrow Nx : Gx = \infty,$$

on $\infty = N[x : P^{*}_{=}(0,x)]$, *i.e.* ∞ és el nombre de la sèrie dels nombres naturals (Frege l'anomena *Endlos*). Doncs bé, tal com ha assenyalat R. G. Heck en l'article "The Development of Arithmetic in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*" (*1993*), la demostració d'aquest teorema equival a provar que les següents proposicions determinen una estructura isomorfa als nombres naturals:

(1) $\mathrm{Func}(S(\xi,\eta))$

(2) $\neg\exists x[S^{*}_{=}(0,x) \wedge S^{*}(x,x)]$

[1] *Dummett 1991*, 12-13.
[2] S'esdevé el mateix amb els teoremes de la lògica i la seva deducció a partir dels axiomes. Per això Herbrand ha parlat de *completesa experimental*.

(3) $\forall x[\mathrm{Fin}x \rightarrow \exists y S(x,y))]$

(4) $\forall x[Finx \leftrightarrow S^{*}_{=}(0,x)]$.[1]

(El que Frege demostra és que si es compleixen les condicions explicitades en l'antecedent del teorema 263, llavors el nombre de Gs és ∞, perquè els Gs ordenats per $Q^{*}(\xi,\eta)$ són isomorfs als nombres naturals ordenats per $P^{*}_{=}(\xi,\eta)$. (1)-(4) s'obtenen directament a partir de les condicions expressades en l'antecedent del teorema 162, substituint $Q^{*}(\xi,\eta)$ per $S(\xi,\eta)$ i $G\xi$ per $\mathrm{Fin}\xi$, reemplaçant prèviament $\neg\exists x Q^{*}(x,x)$ per la condició més feble $\neg\exists x[Q^{*}_{=}(a,x) \wedge Q^{*}(x,x)]$).[2]

Tal com explicarem en la secció següent, en una carta adreçada a Frege el 1902, Russell li comunicava que el sistema lògic de *Grundgesetze* era inconsistent. Frege va ser conscient des d'un primer moment de la gravetat d'aquest fet, perquè la seva pròpia anàlisi el va dur a identificar el seu axioma V com l'origen del problema. Ara bé, com ja sabem, aquest axioma és el que governa les extensions dels conceptes i, conseqüentment, és necessari per a la derivació del principi de Hume a partir de la definició explicita de nombre. En aquest sentit, la paradoxa de Russell ataca el cor del programa logicista i anorrea la possibilitat de reduir l'aritmètica a la lògica -almenys en els termes que Frege l'havia plantejat a *Grundlagen* i *Grundgesetze*. En realitat, el mateix Frege ja havia manifestat en el prefaci de *Grundgesetze* els seus dubtes sobre l'axioma V i, en particular, sobre el seu caràcter lògic:

> Al meu parer, només pot sorgir una disputa en referència a la llei bàsica V relativa als cursos de valors, la qual encara no ha estat enunciada expressament pels lògics, si bé és en ella que hom pensa quan parla, per exemple, de les extensions dels conceptes. Jo la tinc per una llei estrictament lògica.[3]

De fet, com hem vist abans, d'aquest axioma se segueix l'existència d'extensions (*Cf. supra*, § 8) i, per tant, almenys des d'un punt de vista modern, no el podem considerar un axioma lògic pròpiament dit. En qualsevol cas, tal com reconeix Frege en una carta adreçada a Russell de 28 de Juliol de 1902, el recurs a aquest axioma és imprescindible per a una

1 *Cf. Demopoulos 1995*, 283-5. Evidentment, Dedekind havia demostrat un resultat molt similar a *Was sind*, secció X.

2 Frege demostra el teorema 263 a partir d'un teorema més feble que conté aquesta condició. De totes maneres, Frege demostra independentment l'*axioma* (2) com el teorema 145.

3 *Frege 1962 1*, VII.

fonamentació lògica de l'aritmètica, perquè és només gràcies a ell que hom pot introduir les classes com objectes lògics, això és, com extensions de conceptes:

> Jo mateix vaig refusar durant molt de temps admetre els cursos de valor i per tant les classes [conjunts]; però no veia una altra possibilitat per tal de fonamentar l'aritmètica en la lògica. La qüestió és, en definitiva, com copsem els objectes lògics? I jo no he trobat altra resposta que aquesta: els copsem com extensions de conceptes, o més generalment, com a cursos de valors de funcions.

D'aquí que Frege veiés l'axioma V com un requisit imprescindible per a la tasca de fonamentació lògica de les matemàtiques i que l'introduís com un axioma més del seus sistema lògic, tot i els dubtes que tenia sobre el seu caràcter lògic. D'aquí també que, un cop rebuda la carta en què Russell li comunicava la inconsistència del seu sistema lògic i comprovat que aquesta tenia el seu origen en l'axioma V, Frege intentés solucionar la paradoxa de Russell imposant certes restriccions a l'axioma V que no alteressin en cap cas el fet bàsic que hom pugui deduir d'ell que a cada concepte li correspongui una extensió, car això equivalia al seu parer a que les extensions i, en particular, els nombres, poguessin ser considerats objectes lògics. Tal com veurem en la secció següent, en efecte, Frege afegirà un apèndix a *Grundgesetze* en el qual esbossarà una solució a la paradoxa de Russell en aquesta direcció, per la qual cosa afirmarà en les darrers línies d'aquesta obra que:

> Hom pot considerar com el problema fonamental de l'aritmètica la qüestió: com copsem els objectes lògics i, en particular, els nombres? A través de quin mitjà estem autoritzats a reconèixer els nombres com objectes lògics? Encara que aquest problema no ha estat resolt en la mesura que jo pensava quan vaig concebre aquests volums, no em queda cap dubte que el camí cap a la seva solució ha estat trobat.[1]

Malauradament, tal com explicarem després, la solució proposada per Frege es revelà també inconsistent, per la qual cosa les esperances de Frege en una fonamentació lògica de l'aritmètica eren debades. En qualsevol cas, estudis recents han demostrat no només que l'*aritmètica fregeana* -és a dir, la teoria de segon ordre l'únic axioma no lògic de la qual és el principi de Hume- és consistent, sinó també que Frege aconseguí demostrar que els axiomes

[1] *Frege 1962 2*, 265.

de l'aritmètica se segueixen del principi de Hume,[1] l'anomenat *teorema de Frege*, la qual cosa mostra l'èxit -si bé parcial i en cap cas respecte de l'objectiu principal proposat inicialment- de la tasca empresa per Frege a *Grundgesetze*.

11. La paradoxa de Russell

Quan el volum II de *Grundgesetze* ja era a l'impremta, Russell escriví una carta a Frege amb data del 16 de Juny de 1902, en la qual, després de manifestar el seu acord amb tots els punts essencials del primer volum de *Grundgesetze* i, en especial, amb tot el que feia referència a les funcions, assenyala que:

> Només he trobat una dificultat en un punt. Vostè declara [p. 17] que la funció podria constituir també l'element indeterminat. Això pensava jo abans, però aquest punt de vista em sembla ara dubtós, a causa de la següent contradicció: Sigui *w* el predicat "ser un predicat que no pot predicar-se d'ell mateix". Pot predicar-se *w* de si mateix? De cada resposta se'n segueix el seu contrari. Per això, s'ha de concloure que *w* no és un predicat. Anàlogament, no hi ha cap classe [*Klasse*] (com un tot) d'aquelles classes que, com a tots, no pertanyin a si mateixes. D'això en concloc que sota determinades circumstàncies un conjunt [*Menge*] definible no forma un tot.[2]

Veiem, doncs, que Russell planteja en realitat dues paradoxes o, si preferim dir-ho així, enuncia dues formulacions de la seva famosa paradoxa: una formulació intensional, referida a predicats, i un altra extensional, referida a classes. La resposta de Frege (22/6/1902) és prou coneguda:

> El seu descobriment de la contradicció m'ha sorprès d'allò més i, quasi bé diria, que m'ha deixat atònit, car fa trontollar el fonament sobre el qual jo pensava que s'havia de construir l'aritmètica.[3]

---

[1] Ens referim fonamentalment a l'article de Boolos "The Consistency of Frege's *Foundations of Arithmetic*" (*1987*).
[2] *Frege 1976*, 211.
[3] *Ibid.*, 213.

En efecte, segons reconeix el mateix Frege, l'antinòmia de Russell mostraria que "la meva llei V [...] és falsa"[1] i concretament que "la transformació de la generalitat d'una igualtat en una igualtat de cursos de valors [...] no és sempre permesa".[2] Amb tot, Frege confia en que "ha de ser possible establir condicions"[3] per a les transformacions d'aquesta mena, "de manera que l'essencial de les meves demostracions pugui preservar-se".[4] Però una anàlisi més aprofundit de l'antinòmia el durà en el *Nachwort* (Apèndix) de *Grundgesetze* a canviar el seu punt de vista sobre l'origen de la dificultat: "la transformació de la generalitat d'una igualtat en una igualtat de cursos de valors no està en discussió, només és la transformació contrària que no sempre és demostrable".[5] De fet, tal com veurem més endavant, la resposta de Frege a l'antinòmia de Russell en el *Nachwort* consistirà a imposar una restricció a la transformació de la igualtat dels cursos de valors de dues funcions en la igualtat dels valors d'ambdues funcions per qualsevol argument, a saber, que cap d'aquests arguments sigui un d'aquells cursos de valors, condició que, en tot cas, es revelarà més endavant insuficient. Frege conclou aquesta primera carta a Russell, assenyalant que "l'expressió "un predicat és predicat de si mateix" no em sembla correcta. Un predicat és, per regla general, una funció de primer nivell, la qual requereix com argument un objecte i, doncs, no pot tenir-se a si mateixa com argument (subjecte). Per tant, jo diria millor: un concepte és predicat de la seva extensió. Si la funció $\Phi(\xi)$ és un concepte, designo aquesta extensió (o la classe corresponent) per $\dot{\varepsilon}\,\Phi(\xi)$ (si bé la justificació d'això ara se m'acut certament dubtosa). $\Phi(\dot{\varepsilon}\,\Phi(\xi))$ [...] representa llavors la predicació del concepte $\Phi(\xi)$ de la seva pròpia extensió".[6] Com ja sabem, en efecte, els predicats o conceptes no poden ser arguments de si mateixos, perquè són de naturalesa incompleta o insaturada i, per tant, no són objectes, però les funcions -i, en particular, els conceptes o predicats- només poden tenir objectes com arguments. Aquest és un dels principis bàsics de la jerarquia de funcions, el qual impedeix la formació de noms de funció del tipus $\phi(\phi(\xi))$ que donen lloc a la paradoxa intensional (*Cf. supra*, § 9). Això fa, en suma, que Frege pugui ignorar la paradoxa de Russell en la seva versió intensional. És només la versió extensional la que amenaça el seu sistema lògic i tota la reconstrucció lògica de les matemàtiques clàssiques, donat que aquesta paradoxa mostra precisament que l'axioma V, a partir del qual s'introdueixen contextualment

1 *Ibid.*, 213.
2 *Ibid.*, 213.
3 *Ibid.*, 213.
4 *Ibid.*, 213.
5 *Frege 1962 2*, 257.
6 *Frege 1976*, 213-14.

les extensions i, en darrer terme, els diferents tipus de nombres, és inconsistent. Frege arriba a aquesta conclusió després de reconstruir formalment, pas a pas, la derivació de la paradoxa de Russell a partir del sistema lògic de *Grundgesetze* i descobrir en l'aplicació irrestricte de l'axioma V l'origen del problema. Tal com hem dit abans, la solució fregeana en el *Nachwort* consistirà a imposar una restricció a la transformació de la igualtat de les extensions de dos conceptes en la generalitat de la igualtat dels valors d'aquests conceptes per qualssevol arguments, restricció que afecta a fi de comptes als arguments admissibles per aquests conceptes en excloure la possibilitat que les extensions d'aquests mateixos conceptes figurin com arguments seus. Però aquesta no va ser la única possibilitat d'atacar la paradoxa de Russell que considerà Frege. En una segona carta adreçada a Russell (29/6/1902), com a resposta al suggeriment expressat per Russell en la carta anterior (24/6/1902) de prohibir les fórmules que expressen l'aplicació d'un concepte a la seva pròpia extensió -això és, fórmules del tipus $\varphi(\dot{\varepsilon}\ \varphi(\varepsilon))$, Frege escriu:

> Però si vostè admet un signe per l'extensió d'un concepte (una classe) com a nom propi amb significat [*Bedeutungsvoll*] i, per tant, reconeix la classe com a objecte, llavors aquesta mateixa classe o bé cau sota el concepte o no. *Tertium non datur*.[1]

I, en aquest cas, sorgeix inevitablement la contradicció. En efecte, sigui el concepte "… és una classe que no pertany a si mateixa" (és a dir, el concepte "ξ és l'extensió d'un concepte sota el qual ξ no cau"). Aleshores l'extensió d'aquest concepte serà la classe de totes les classes que pertanyen a si mateixes. Anomenem a aquesta classe U i preguntem-nos si pertany o no a si mateixa (és a dir, preguntem-nos si l'extensió del concepte "ξ és l'extensió d'un concepte sota el qual ξno cau" cau o no sota aquest mateix concepte). El que Frege demostrarà en el *Nachwort* de *Grundgesetze* serà que si U pertany a U, llavors U no pertany a U i, que si U no pertany a U, llavors U pertany a U, la qual cosa és una contradicció. Així doncs, la paradoxa de Russell sorgeix de mantenir simultàniament les dues tesis següents:

(*i*) Cada concepte de primer nivell determina la seva extensió;

---

[1] *Ibid.*, 217.

(*ii*) Les extensions són objectes propis [*eigentlichen Gegenstände*], això és, són arguments admissibles per a qualsevol concepte de primer nivell.

La primera tesi és una conseqüència immediata de l'axioma V. En efecte, tal com hem explicat anteriorment, Frege dedueix d'aquest axioma la llei:

$$\forall F \forall y(Fy \leftrightarrow y \in \hat{x}Fx),$$

la qual determina completament l'extensió del concepte F, *i.e.* la classe $\hat{x}Fx$ (*Cf. supra*, § 8). Per tant, si neguem la tesi (*i*) hem de negar també l'axioma V i amb ell la possibilitat d'introduir les extensions com objectes lògics, amb la qual cosa el programa logicista seria impossible de dur a terme -recordem, en efecte, que els nombres són definits com extensions de conceptes d'un determinat tipus i que d'aquesta definició depèn, per exemple, la demostració de l'axioma de l'infinit. Una possible via de solució a la paradoxa seria, doncs, negar la tesi (*ii*), és a dir, considerar les extensions dels conceptes o classes com a objectes impropis [*unegeintlichen Gegenstände*], objectes dels quals no podem afirmar que cauen sota qualsevol concepte de primer nivell i, per tant no satisfan la llei del terç exclòs. La idea és dividir les funcions de primer nivell segons els tipus [*Arten*] dels seus arguments i valors possibles, de manera que l'extensió d'un concepte no pugui esdevenir un argument d'aquest mateix concepte i evitar així que sorgeixi la paradoxa de Russell. Però en el *Nachwort* Frege rebutjarà aquesta possibilitat, degut a la complexitat del sistema que en resultaria: les funcions de primer nivell s'haurien de dividir segons que els seus arguments i valors possibles siguin objectes propis, impropis o de totes dues menes:

> Hom obtindria així nou tipus [*Arten*] [de funcions de primer nivell]. A aquests els correspondria novament nou tipus de cursos de valors, objectes impropis, els quals s'haurien de distingir lògicament. Les classes d'objectes propis s'haurien de distingir de les classes de classes d'objectes propis; les relacions en extensió [Relationen] entre objectes propis haurien de distingir-se de les classes d'objectes propis, de les classes de relacions en extensió entre objectes propis, i així successivament. Hom obtindria així una multiplicitat incalculable de tipus; i, en general, els objectes que pertanyessin a diferents tipus no podrien figurar com arguments de la mateixa funció: Però sembla extraordinàriament difícil establir un sistema complet de regles mitjançant el qual es pugi decidir generalment quins

objectes són admissibles com arguments de quines funcions. A més d'això, és dubtós que la introducció d'objectes impropis estigui justificada.[1]

Veiem així que el que Frege refusa és una teoria de tipus que té una certa semblança amb la *teoria dels tipus lògics* que Russell exposa a *Principles of Mathematics* com a resposta a la paradoxa i com a resultat també de la idea abans esmentada que les classes són objectes impropis (*Cf. infra*, cap. VI, § 7). L'atractiu principal d'elaborar una teoria de tipus és que permet seguir considerant les extensions com objectes -si bé objectes impropis-, la qual cosa, tal com hem explicat abans, és fonamental per a la filosofia de la matemàtica fregeana. Sigui com sigui, una vegada rebutjada la possibilitat de cercar la solució a la paradoxa a partir de la teoria de tipus, Frege acceptarà les extensions o classes com objectes de ple dret i cercarà la solució a la paradoxa en una modificació de l'axioma V. De fet, donat que la contradicció sorgeix de la consideració de les extensions que cauen sota el concepte del qual en són l'extensió, la solució més immediata a la paradoxa és prohibir que aquests conceptes puguin admetre les seves pròpies extensions com arguments i això es pot aconseguir afegint aquesta prohibició a l'axioma V. Però per veure això més clarament, cal que investiguem com deriva el mateix Frege la paradoxa de Russell a partir del sistema lògic de *Grundgesetze* i, donat el paper clau que juga en aquesta derivació l'axioma V, començarem fent algunes consideracions prèvies relatives a aquest axioma. Tal com hem vist abans, l'axioma V en la seva versió per a conceptes es pot formalitzar en notació moderna de la següent manera:

$$\hat{x}Fx = \hat{x}Gx \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx),$$

i, per tant, és equivalent a les dues sentències següents:

$$\forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \rightarrow \hat{x}Fx = \hat{x}Gx \qquad \text{(Va)}$$

$$\hat{x}Fx = \hat{x}Gx \rightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx). \qquad \text{(Vb)}$$

Les dues sentències anteriors afirmen respectivament el següent:

---

[1] *Frege 1962 2*, 255.

"Si qualsevol objecte que cau sota el concepte *F* cau també sota el concepte *G*, llavors els conceptes *F* i *G* tenen la mateixa extensió"
"Si els conceptes *F* i *G* tenen la mateixa extensió, llavors qualsevol objecte que cau sota *F* cau també sota el concepte *G*".

Ara, "Δ és una classe que no pertany a si mateixa" pot formalitzar-se de la següent manera:

$$\exists G(\hat{x}Gx = \Delta \wedge \neg G\Delta)$$

(literalment: "Δ és l'extensió d'algun concepte sota el qual ell mateix no cau"). I "*U* és la classe de totes les classes que no pertanyen a si mateixes" pot expressar-se així:

$$U = \hat{x}[\exists G(\hat{x}Gx = x \wedge \neg Gx)]$$

(literalment: "*U* és l'extensió del concepte "objecte que és l'extensió d'algun concepte sota el qual ell mateix no cau""). Conseqüentment, podem formalitzar "la classe de totes les classes que no pertanyen a si mateixes no pertany a si mateixa" de la següent manera:

$$\exists G(\hat{x}Gx = U \wedge \neg GU)$$

(literalment: "*U* és l'extensió d'algun concepte sota el qual *U* no cau"). Per Vb és té que:

$$\hat{x}Fx = \hat{x}[\exists G(\hat{x}Gx = \Delta \wedge \neg G\Delta)] \rightarrow [FU \leftrightarrow \exists G(\hat{x}Gx = U \wedge \neg GU)]$$

(literalment: si l'extensió del concepte *F* és igual a l'extensió del concepte "objecte que és l'extensió d'algun concepte sota el qual ell mateix no cau", llavors *U* cau sota el concepte *F* si, i només si, *U* és l'extensió d'algun concepte sota el qual *U* no cau).[1] Substituint ara $\hat{x}[\exists G(\hat{x}Gx = \Delta \wedge \neg G\Delta)]$ per *U* i per la regla de lògica proposicional que permet passar de "si *p*, llavors *q* si, i només si, *r*" a "si *r*, llavors, si *p*, llavors *q*", es té que:

1 Notem que en el consegüent Frege ha agafat *U* com argument dels conceptes la igualtat de l'extensió dels quals s'afirma en l'antecedent.

$$\exists G(\hat{x}Gx = U \wedge \neg GU) \rightarrow (\hat{x}Gx = U \rightarrow FU) \qquad \alpha$$

(literalment: si U és l'extensió d'algun concepte sota el qual U no cau, llavors, si U és l'extensió del concepte F, U cau sota F). Per la regla de generalització es té llavors que:

$$\exists G(\hat{x}Gx = U \wedge \neg GU) \rightarrow \forall G(\hat{x}Gx = U \rightarrow GU) \qquad \beta$$

i.e. "si U no pertany a si mateixa, llavors U pertany a si mateixa" (literalment: si U és l'extensió d'algun concepte sota el qual U no cau, llavors per qualsevol concepte, si U és l'extensió d'aquest concepte, U cau sota ell). D'una altra banda, per l'axioma IIb és té que:

$$\forall G(\hat{x}Gx = U \rightarrow GU) \rightarrow (\hat{x}Gx = U \rightarrow FU) \qquad \gamma$$

(literalment: si U cau sota qualsevol concepte del qual n'és la seva extensió, llavors, si U és l'extensió del concepte F, U cau sota F). Si substituïm ara $F\xi$ per $\exists G(\hat{x}Gx = \xi \wedge \neg G\xi)$, obtenim:

$$\forall G(\hat{x}Gx = U \rightarrow GU) \rightarrow [\hat{x}\{\exists G(\hat{x}Gx = x \wedge \neg Gx)\} = U \rightarrow \exists G(\hat{x}Gx = U \wedge \neg GU)] \qquad \delta$$

(literalment: si U cau sota tot concepte del qual n'és la seva extensió, llavors, si U és l'extensió del concepte "ξ és l'extensió d'algun concepte sota el qual ξ no cau", U és l'extensió d'algun concepte sota el qual U no cau"). D'aquí, tenint en compte la definició de U, es té que:

$$\forall G(\hat{x}Gx = U \rightarrow GU) \rightarrow \exists G(\hat{x}Gx = U \wedge \neg GU), \qquad \varepsilon$$

és a dir, "si U pertany a si mateixa, llavors no pertany a si mateixa" (literalment: "si U cau sota tot concepte del qual n'és la seva extensió, llavors U és l'extensió d'algun concepte sota el qual U no cau"). A partir de ε se segueix pel teorema Ig $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)$[1] que

$$\exists G(\hat{x}Gx = U \wedge \neg GU) \qquad \zeta$$

[1] Notem, en efecte, que el consegüent de ε és la negació del seu antecedent.

(literalment: “U és l’extensió d’algun concepte sota el qual U no cau”). D’aquí i β se segueix finalment que:

$$\forall G(\hat{x}Gx = U \to GU) \qquad \eta$$

(literalment: “U cau sota tot concepte del qual n’és la seva extensió”). Doncs bé, tal com assenyala Frege, “els enunciats ζ i η es contradiuen mútuament. L’error només pot raure en la nostra llei (Vb), la qual llavors ha de ser falsa [...] junt amb (Vb) també s’ha d’abandonar (V), però no (Va). La transformació de la generalitat d’una igualtat en una igualtat de cursos de valors no està en discussió, només és la transformació contrària que no sempre és demostrable”.[1] En efecte, tal com hem pogut comprovar en la derivació de la paradoxa de Russell duta a terme per Frege a partir del sistema lògic de *Grundgesetze*, l’origen d’aquesta rau en la possibilitat que les extensions caiguin sota els conceptes dels quals en són l’extensió, la qual cosa suggereix prohibir l’aplicació dels conceptes a la seva pròpia extensió per evitar que sorgeixi la paradoxa. I com que l’axioma a partir del qual s’introdueixen contextualment les extensions és l’axioma V, tot establint un criteri d’igualtat per a les extensions, sembla natural reformular aquest axioma de la següent manera: “l’extensió d’un concepte coincideix amb la d’un altre, si [i només si] cada objecte que cau sota el primer concepte, amb l’excepció de la seva extensió, cau també sota el segon concepte i, recíprocament, si cada objecte que cau sota el segon concepte, amb l’excepció de la seva extensió, cau també sota el primer concepte”.[2] Frege formalitza aquesta restricció de axioma V de la següent manera:

$$\hat{x}Fx = \hat{x}Gx \leftrightarrow \forall x[\{\neg(x = \hat{x}Fx) \wedge \neg(x = \hat{x}Gx)\} \to Fx = Gx] \qquad \text{(V)'}$$

Aquest axioma és lògicament equivalent a la conjunció de les dues sentències següents:

$$\forall x[\{\neg(x = \hat{x}Fx) \wedge \neg(x = \hat{x}Gx)\} \to Fx = Gx] \to \hat{x}Fx = \hat{x}Gx \qquad \text{(Va)'}$$

$$\hat{x}Fx = \hat{x}Gx \to \forall x[\{\neg(x = \hat{x}Fx) \wedge \neg(x = \hat{x}Gx)\} \to Fx = Gx], \qquad \text{(Vb)'}$$

1 *Ibid.*, 257, citat ja parcialment.
2 *Ibid.*, 262.

les quals afirmen respectivament el següent:

> "Si qualsevol cosa que cau sota el concepte *F*, llevat de la seva pròpia extensió, cau també sota el concepte *G*, i viceversa, llavors els conceptes *F* i *G* tenen la mateixa extensió"
> "Si els conceptes *F* i *G* tenen la mateixa extensió, llavors qualsevol cosa que cau sota un, llevat de la seva pròpia extensió, cau també sota l'altre".

Ara bé, la restricció que figura a (Va)' no és necessària. En efecte, si *F* i *G* són el mateix concepte i aquest és el concepte "… és l'extensió d'un concepte sota el qual no cau" que genera la paradoxa, llavors no és veritat que si l'extensió d'aquest concepte cau sota *F* llavors caigui sota G, car *F* i *G* són el mateix concepte i el que demostra Frege és precisament que si un objecte cau sota aquest concepte, llavors no hi cau i viceversa. D'aquí que, tal com afirma Frege, (Va) no s'ha d'abandonar. En efecte, tot el que (Va) afirma és una condició suficient per a la igualtat de les extensions i, per tant, deixa oberta la possibilitat que dos conceptes puguin tenir la mateixa extensió encara que hi hagi algun objecte que caigui sota un concepte, però no sota l'altre. En el cas de la paradoxa de Russell, l'antecedent de (Va) serà fals i, per tant, (Va) resta igualment vàlid. El que si s'ha de modificar, en canvi, és (Vb), car la paradoxa de Russell mostra precisament que els conceptes *F* i *G* poden tenir la mateixa extensió, com s'esdevé quan *F* i *G* són el mateix concepte, a saber, el concepte "… és l'extensió d'un concepte sota el qual no cau", sense que sigui veritat que tot el que cau sota un cau sota l'altre. En definitiva, (Vb) ha de ser abandonat i la proposta que Frege fa en el *Nachwort* de *Grundgesetze* és que sigui substituït per (Vb)'. Malauradament, la solució proposada per Frege s'ha revelat també del tot insatisfactòria. En efecte, a partir de (Vb)' hom obté:

$$\forall y[\neg(y = \hat{x}Fx) \rightarrow (y \in \hat{x}Fx \leftrightarrow Fx)].$$

Doncs bé, tal com ha demostrat Quine en el seu famós article "On Frege's way out" (*1955*), aquest axioma junt amb

$$\exists x \exists y \neg(x = y)$$

(sentència que afirma que l'univers té, com a mínim, dos objectes) genera una nova contradicció i, per tant, el sistema lògic de *Grundgesetze* obtingut substituint (Vb) per (Vb)' és inconsistent en qualsevol domini amb dos o més elements.

CAPÍTOL VI

Russell i les contradiccions de la lògica

1. La filosofia de la matemàtica a *Principles of Mathematics*

En el prefaci a *The Principles of Mathematics* (*1903*), Bertrand Russell (1872-1970) afirma el següent:

> L'obra present té dos objectius principals. Un d'aquests, la prova que tota la matemàtica pura s'ocupa exclusivament de conceptes definibles en termes d'un nombre molt reduït de conceptes lògics fonamentals, i que totes les seves proposicions poden deduir-se d'un nombre molt reduït de principis lògics fonamentals s'emprèn en les Parts II-VII d'aquest volum, i s'establirà estrictament mitjançant el raonament simbòlic en el volum II [...] L'altre objectiu d'aquesta obra, el qual ocupa la part I, és l'explicació dels conceptes fonamentals que la matemàtica accepta com a indefinibles.[1]

El primer dels objectius principals de *Principles* és, doncs, la demostració informal de la tesi logicista la qual requereix, entre d'altres coses, l'existència d'un reduït nombre de conceptes lògics a partir dels quals puguin definir-se la resta de conceptes matemàtics. L'altre objectiu principal és precisament l'explicació d'aquests conceptes *indefinibles de les matemàtiques*, tasca fonamental per entendre els desenvolupaments formals posteriors -i, particularment, de *Principia Mathematica*.

Principles comença amb la definició de la *matemàtica pura* com "la classe de totes les proposicions de la forma "*p* implica *q*", on *p* i *q* són proposicions que contenen una o més variables, les mateixes en les dues proposicions, i ni *p* ni *q* contenen cap constant, llevat de constant lògiques".[2] Ara bé, el mateix Russell, en la introducció a la segona edició corregirà i

---

1 *Russell 1903*, XV. Com és ben sabut, el volum II al qual es refereix l'autor, fou escrit en col·laboració amb A. N. Whitehead i es convertí en una obra independent de l'anterior, *Principia Mathematica,* publicada en tres volums entre 1910 i 1913 (*Whitehead i Russell 1910-13*).

2 *Ibid.*, § 1, 3.

comentarà la definició anterior en diversos sentits. En primer lloc, assenyala Russell, la implicació no és sinó una de les formes lògiques a través de les quals poden expressar-se les proposicions matemàtiques. L'èmfasi en aquesta forma hauria estat motivat, explica Russell, per la consideració de la Geometria, car "estava clar que tant els sistemes euclidians com no euclidians havien de ser inclosos en la matemàtica pura i no havien de ser considerats com a mútuament inconsistents. Havíem d'afirmar, doncs, només que els axiomes impliquen les proposicions, no que els axiomes són vertaders i, per tant, les proposicions són vertaderes".[1] En segon lloc, quan es diu que "*p* i *q* són *proposicions* que contenen una o més variables", s'hauria de dir més exactament que *p* i *q* són *funcions proposicionals*, car "la proposició típica de la matemàtica és de la forma "$\phi(x,y,z,...)$ implica $\psi(x,y,z,...)$, qualssevol que siguin els valors que *x*, *y*, *z*, … puguin tenir", on $\phi(x,y,z,...)$ i $\psi(x,y,z,...)$ són, per a cada conjunt de valors de *x*, *y*, *z*, … proposicions".[2] Les proposicions típiques de les matemàtiques són, doncs, el que Russell anomenarà *implicacions formals*. Finalment, cal veure exactament quin sentit té l'afirmació segons la qual "ni *p* ni *q* contenen cap constant, llevat de les constants lògiques". Per això cal preguntar-se primer de tot què és una *constant*. Segons Russell, en matemàtiques es parla sovint de constants per referir-se als *paràmetres*, però "una constant ha de ser quelcom completament definit, respecte al qual no hi hagi cap ambigüitat".[3] Així, per exemple, $1, 2, 3, e, \pi,$ Sòcrates són constants. Per contra, els paràmetres no són sinó *variables* i, per tant, només impròpiament se'ls pot anomenar constants: "Agafem, per exemple, l'equació $ax + by + c = 0$, considerada com l'equació d'una línia recta en un pla. Aquí diem que *x* i *y* són variables, mentre que *a*, *b*, *c* són constants. Però a no ser que estiguem tractant amb una línia completament particular, posem per cas la línia que va des d'un punt particular a Londres fins un punt particular a Cambridge, *a*, *b*, *c* no són nombres definits, sinó que representen qualsevol nombre, i són així també variables. I en Geometria ningú no s'ocupa de línies particulars; sempre discutim sobre *qualsevol* línia".[4] És precisament aquesta *generalitat*, pròpia de les matemàtiques, la que motiva que totes les proposicions que continguin paràmetres o constants no lògiques pròpiament dites hagin de transformar-se en proposicions que només continguin variables i constants lògiques. Segons Russell, si tenim diverses proposicions del mateix tipus, això és, proposicions que difereixen només en el significat dels seus símbols, la tasca pròpia de les matemàtiques és considerar la classe

1 *Ibid.*, VII.
2 *Ibid.*, § 6, 6.
3 *Ibid.*, § 6, 6.
4 *Ibid.*, § 6, 6.

formada per tots els significats que podem donar a aquests símbols, substituir els símbols per variables el rang de valors de les quals sigui aquella classe i afirmar que la fórmula així obtinguda se segueix de la hipòtesi que els símbols pertanyen a la classe en qüestió. Així, per exemple, de les proposicions del tipus "Si Sòcrates es home, llavors és mortal" podem passar a la proposició ""Si *x* és home, llavors *x* és mortal, qualsevol que sigui el valor de *x*". Però aquesta no és encara una proposició de la matemàtica pura, perquè conté les constants no lògiques *home* i *mortal* i la lògica -com a branca de la matemàtica pura- no s'ocupa de les entitats designades per aquestes constants. Cal, doncs, continuar el procés i transformar aquestes constants en variables que designin classes qualssevol. Així obtenim la següent proposició: "Si *a* i *b* són classes i *a* està continguda en *b*, llavors "*x* és un *a*" implica "*x* és un *b*"", que és una proposició de la matemàtica pura perquè conté només tres variables i les constants lògiques *classe*, *contingut en* i les incloses en la noció d'*implicació formal*.[1] Aquest darrer punt és important, perquè en matemàtiques hom es troba sovint que els termes de diverses classes tenen les mateixes propietats i relacions mútues -per exemple, els punts de l'espai euclidià i els nombres complexos- i, en conseqüència, "en cada branca de la matemàtica [pura] hem de tractar amb qualsevol classe d'entitats les relacions mútues [dels termes] de les quals siguin d'un tipus determinat; així, tant la classe com el terme particular considerat, esdevenen una variable".[2] Així, per exemple, a la geometria plana, com a branca de la matemàtica pura, no li pertoca decidir si els valors de les seves variables són punts, nombres complexos o qualsevol altra mena de termes que tinguin el mateix tipus de relacions mútues, car el rang dels seus valors és *qualsevol* classe de termes o entitats les relacions mútues dels quals siguin d'un determinat *tipus*. D'aquesta manera, "les úniques constants vertaderes són els tipus de relacions i el que ells suposen".[3] Ara bé, com que, segons Russell, cada tipus de relacions constitueix una classe definida per alguna propietat definible exclusivament a partir de variables i *constant lògiques*, la matemàtica pura no contindrà més *indefinibles* que les constants lògiques. En definitiva, el fet que totes les constants matemàtiques siguin definibles en termes de constants lògiques i que totes les premisses de les matemàtiques hi facin referència, permetrà demostrar que totes les veritats de les matemàtiques són *a priori*, en el sentit que se segueixen necessàriament de premisses lògiques. I, el descobriment, enumeració i explicació de les constants lògiques fonamentals,

[1] En realitat, com veurem més endavant, la noció de classe i la relació d'inclusió es defineixen a *Principles* en termes d'altres nocions lògiques primitives. En qualsevol cas, no hi ha dubte que Russell també considerava que les primeres eren nocions que pertanyen a la lògica.

[2] *Ibid.*, § 8, 8.

[3] *Ibid.*, § 8, 8.

els *indefinibles de la matemàtica pura*, és el nucli principal de l'anàlisi de la lògica endegat per Russell a *Principles*, que estudiarem en les seccions següents. En la resta d'aquesta secció ens centrarem en el primer dels objectius principals de *Principles* abans esmentats, això és, la demostració informal de la tesi logicista, que situarem primer de tot en el context més ampli de la filosofia de la matemàtica de l'autor, el *logicisme*.

L'argumentació de Russell a *Principles* a favor del logicisme té una certa semblança amb l'argumentació de Frege a *Grundlagen der Arithmetik*. En primer lloc, l'argumentació en ambdós casos és de tipus informal, en el sentit que els autors respectius no empren el raonament simbòlic, però és força acurada i exhaustiva. En aquest sentit, ambdues obres juguen un paper similar respecte a les obres immediatament posteriors dels autors, *Grundgesetze der Arithmetik* i *Principia Mathematica*, on es procedeix formalment a la demostració de la tesi logicista. En segon lloc, hi ha una coincidència bastant acusada en els punts claus de l'argumentació a favor del logicisme de tots dos autors encara que, com veurem al llarg de la nostra exposició, la font principal d'inspiració per a Russell és l'obra de Peano, no pas la de Frege. El mateix autor reconeix en el Prefaci que les influències més decisives en matemàtiques foren les de Cantor i Peano, donat que "l'obra del professor Frege, que anticipa en bona mesura la meva, era en la seva major part desconeguda per mi quan va començar la impressió de l'obra present; havia vist els seus *Grundgesetze der Arithmetik*, però degut a la gran dificultat del seu simbolisme, no vaig saber adonar-me'n de la seva importància ni entendre els seus continguts. L'única manera, en un estat tan avançat [de l'elaboració de *Principles*], de fer justícia a la seva obra, era dedicar-li un Apèndix".[1] Una de les coincidències entre l'obra de Frege i la de Russell és que, en ambdós casos, l'argumentació a favor del logicisme s'utilitza com a mitjà per demostrar que la filosofia de la matemàtica kantiana és errònia. El mateix Russell exposa els trets essencials del punt de vista kantià en els següents termes:

> Començant per la qüestió: "¿Com és possible la matemàtica pura?", Kant destaca primer de tot que totes les proposicions de les matemàtiques són sintètiques i infereix d'aquí que aquestes proposicions no poden, com Leibniz confiava, ser demostrades per mitjà d'un càlcul lògic. Ans al contrari, elles requereixen, diu, certes proposicions sintètiques *a priori*, que podrien anomenar-se axiomes, i fins i tot llavors (sembla), el raonament emprat en les deduccions a partir dels axiomes és diferent dels de la lògica pura. Kant, en efecte, no volia admetre que el coneixement

[1] *Ibid.*, XVI.

> del món extern pogués obtenir-se només per l'experiència i d'aquí va concloure que totes les proposicions de les matemàtiques tenen a veure amb [*deal with*] quelcom subjectiu, que anomena una forma de la intuïció. Hi ha dues formes, l'espai i el temps; el temps és l'origen de l'Aritmètica, l'espai de la Geometria. És només a través de les formes d'espai i temps que els objectes poden ser experimentats per un subjecte; d'aquesta manera, les matemàtiques són aplicables a tota l'experiència. El que és essencial, des del punt de vista lògic, és que les intuïcions a priori forneixen mètodes de raonament i inferències que la lògica formal no admet; aquests mètodes, es diu, fan la figura (que podria, per suposat, ser merament imaginada) essencial a totes les proves geomètriques. L'opinió que l'espai i el temps són subjectius és reforçada per les antinòmies, on Kant procedeix a demostrar que, si [l'espai i el temps] fossin quelcom altre que formes de l'experiència serien definitivament autocontradictoris.[1]

Ara bé, es pregunta Russell, (1) ¿són els raonaments de les matemàtiques diferents d'alguna forma als de la lògica formal? (2) ¿Hi ha cap contradicció en les nocions d'espai i temps? Car si la resposta a ambdues preguntes és negativa, hom haurà anorreat els dos pilars en els quals es basa la filosofia de la matemàtica kantiana. Centrant-nos en la primera qüestió -car la segona qüestió excedeix l'àmbit del nostre estudi-, cal dir que l'error de Kant respecte a la naturalesa del raonament matemàtic tindria, segons Russell, diverses causes:

> En primer lloc, Kant mai va dubtar ni un moment que les proposicions de la lògica fossin analítiques i, en canvi, va percebre correctament que les de les matemàtiques són sintètiques. Però de llavors ençà ha esdevingut clar que la lògica és tan sintètica com totes les altres classes de veritats [...] Segonament, la lògica formal estava, en l'època de Kant, en un estat molt més endarrerit que el present [...] el sil·logisme encara romania com el tipus de raonament formal correcte; i el sil·logisme era certament inadequat per a les matemàtiques. Però ara, gràcies principalment als lògics matemàtics, la lògica formal s'ha enriquit per diverses formes de raonament no reductibles al sil·logisme i, per mitjà d'aquestes, totes les matemàtiques poden ser, i parts considerables de les matemàtiques ja ho han estat, desenvolupades estrictament d'acord amb les regles [de la lògica]. En tercer lloc, en els dies de Kant, les matemàtiques mateixes eren, lògicament, molt inferiors a com són ara. És completament cert, per exemple, que qualsevol que intentés, sense l'ús de la figura, deduir la setena proposició d'Euclides a partir dels axiomes d'Euclides, trobaria la

[1] *Ibid.*, § 433, 456-57.

> tasca impossible [...] [i] donat que la correcció dels resultats semblava indubtable, era natural suposar que la demostració matemàtica era quelcom diferent de la demostració lògica. El fet és, però, que tota la diferència consistia en el fet que les demostracions matemàtiques eren simplement incorrectes. A partir d'un examen més acurat, s'ha trobat que moltes de les proposicions, que per a Kant eren veritat indubtables, són de fet demostrablement falses. Un nombre més gran de proposicions -per exemple, la setena proposició d'Euclides esmentada més amunt- poden ser deduïdes estrictament [*rigididly*] de certes premisses, però és més dubtós que les premisses siguin vertaderes o falses. Així, la suposada peculiaritat del raonament matemàtic ha desaparegut.[1]

Així doncs, la primera causa que explicaria la tesi kantiana segons la qual el raonament matemàtic i lògic són de distinta naturalesa seria el fet que, per a Kant, les proposicions de les matemàtiques són sintètiques -*a priori*- i, en canvi, les de la lògica són analítiques i, per tant, que la naturalesa de les proposicions d'ambdues ciències són completament distintes. Tot això és prou conegut i no cal explicar-lo de nou. Més interessant i sorprenent és, en canvi, l'afirmació de Russell segons la qual no només les proposicions de les matemàtiques sinó també les de la lògica són sintètiques. Per explicar aquest fet, Russell remet al lector a la seva obra *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz* (*1900*), on l'autor es limita a afirmar en el paràgraf 11 que cap veritat, llevat possiblement de les de la forma "A és A" és analítica. Així doncs, l'afirmació russelliana que la lògica és sintètica, no sembla tenir una especial rellevància, excepte pel fet de corroborar la concepció realista de la lògica -i, per extensió, de la matemàtica- com una branca més del coneixement humà i de ser coherent amb la tesi logicista -que requereix evidentment que les proposicions d'una i altra ciència siguin d'idèntica naturalesa.

Les altres dues causes estarien relacionades amb l'estat de l'evolució de la lògica i la matemàtica respectivament a l'època de Kant. Com és ben sabut, Kant identificava la lògica formal amb la sil·logística, la qual romania segons ell pràcticament intacta i perfecta d'ençà Aristòtil i de la qual no en calia esperar, doncs, cap millora en el futur. Ara bé, la sil·logística aristotèlica era clarament inadequada per donar raó del tipus de raonament emprat en matemàtiques a l'època de Kant, donat el fet evident que les matemàtiques utilitzaven en les seves deduccions formes d'inferència que restaven fóra del cànon sil·logístic. Precisament, segons Russell, "en aquest fet es basava la força del punt de vista kantià, el qual afirmava que

[1] *Ibid.*, § 434, 457-58.

el raonament matemàtic no era estrictament formal, sinó que sempre emprava intuïcions, *i.e.* el coneixement *a priori* de l'espai i el temps".[1] Però, continua Russell:

> Gràcies al progrés de la Lògica Simbòlica, especialment tal i com és presentada pel Professor Peano, aquesta part de la filosofia kantiana és ara susceptible d'una refutació final i irrevocable. Amb l'ajut de deu principis de deducció i unes altres deu premisses de naturalesa lògica (ex: "la implicació és una relació"), totes les matemàtiques poden ser deduïdes estrictament i formal; i totes les entitats que figuren en les matemàtiques poden ser definides en termes d'aquelles que figuren en les vint premisses esmentades.[2]

Per a Russell, en definitiva, (*i*) la demostració de la tesi logicista implica la refutació de la filosofia de la matemàtica kantiana i (*ii*) aquesta demostració ha estat possible mercès al progrés de la lògica simbòlica. El primer punt és evident, donada la independència de la lògica de les nocions d'espai i temps. El segon punt requereix, en canvi, algunes explicacions. Segons Russell, el reconeixement de les inferències que no responen al cànon sil·logístic hauria estat el motiu que hauria fet progressar la lògica des de Leibniz fins a Boole, encara que aquesta disciplina no hauria aconseguit ser de quasi bé cap utilitat per a la filosofia i les matemàtiques fins que va ser transformada pels mètodes de Giusseppe Peano (1858-1932). La influència de la coneixença de la lògica de Peano en la biografia intel·lectual de Russell es descrita per P. Hylton en la seva obra *Russell, Idealism and the Emergence of Analytic Philosophy* (*1990*) en els termes següents:

> Russell tenia interès des de feia molt de temps en la filosofia de les matemàtiques, especialment de la geometria, però no va ser fins després d'haver assistit al Congrés de Filosofia a Paris, el Juliol de 1900, que es va despertar en ell un interès seriós per la lògica matemàtica. Ell mateix va descriure més tard la seva assistència a aquesta Conferència com "l'esdeveniment més important" en "l'any més important" de la seva vida intel·lectual. Segons la seva pròpia narració, va quedar tan impressionat per l'actuació de Peano, que va començar a estudiar el seu treball. En un mes ja dominava la lògica de Peano i la seva escola i començava a estendre la tècnica a noves àrees i, en particular, a la lògica de relacions.[3]

---

[1] *Ibid.*, § 4, 4.
[2] *Ibid.*, § 4, 4.
[3] *Hylton 1990*, 167.

La influència de Peano en Russell és certament molt acusada no només en matemàtiques sinó també en lògica, encara que en ambdós casos Russell es mostrarà crític i aportarà innovacions importants en alguns aspectes essencials. El motiu fonamental de la influència de Peano sobre Russell en lògica és el paper central que tots dos autors concedeixen a aquesta disciplina en el propòsit compartit de fonamentar les matemàtiques sobre bases més segures que la intuïció -encara que, com és ben sabut, Peano no pretenia reduir les matemàtiques a la lògica. Això va fer que, segons el parer de Russell, la lògica de Peano fos molt més dúctil i apropiada per formalitzar les proposicions primitives i definicions de les matemàtiques que no pas l'àlgebra de la lògica de Boole i els seus seguidors i, per tant, fos adoptada per ell en els seus trets essencials en detriment d'aquesta. La lògica de Peano abastava tant la lògica proposicional com el càlcul de classes i, com veurem en les properes seccions, l'exposició de Russell d'ambdues disciplines evoca constantment la de Peano. Tanmateix, segons Russell, la lògica de Peano és defectuosa en un punt essencial: no reconeix el caràcter irreductible de les proposicions de tipus relacional, en considerar que totes elles són reductibles a proposicions del tipus subjecte-predicat. Aquest seria el motiu pel qual, segons Russell, Peano no va desenvolupar la lògica de relacions. Ara bé, com assenyalàvem al començament d'aquesta secció, els diferents tipus de relacions entre qualsevol mena d'entitats determinen les distintes branques de les matemàtiques i constitueixen, en definitiva, els veritables objectes d'estudi d'aquesta ciència. Per això, assenyala Russell, "la lògica de relacions té un lligam més immediat amb les matemàtiques que el que tenen la lògica de classes o proposicions i, qualsevol expressió correcta i adequada de les veritats matemàtiques només és possible per mitjà d'ella".[1] Els primers que s'adonaren de la gran importància de la lògica de relacions foren Peirce i Schröder però, assenyala Russell, els seus mètodes estaven inspirats en la lògica de Boole, la qual cosa feia pràcticament impossible la seva aplicació a la tasca de fonamentació de les matemàtiques. La tasca reservada a Russell serà, doncs, estendre el llenguatge simbòlic de Peano -molt més adequat, com ja hem dit, per a l'expressió de les proposicions i definicions de les matemàtiques- a la lògica de relacions, la qual cosa durà a terme en l'article "The Logic of Relations with Some Applcations to the Theory of Series" (*1901*), en el qual es basarà l'exposició de *Principles* sobre aquesta disciplina lògica. Segons Russell, la importància de la lògica de relacions per a la fonamentació de les matemàtiques prové bàsicament de la

[1] *Russell 1903*, § 27, 23-24.

rellevància de la noció d'*ordre* en les matemàtiques modernes i del paper clau que juguen les relacions d'*equivalència* en la definició de *nombre*:

> La importància de l'ordre, des d'un punt de vista estrictament matemàtic, ha estat incrementada incommensurablement per molts dels desenvolupaments moderns. Dedekind, Cantor i Peano han mostrat com fonamentar l'Aritmètica i l'Anàlisi en sèries d'un cert tipus -*i.e.* en aquelles propietats dels nombres finits en virtut de les quals formen el que anomenaré una *progressió*. Els irracionals són totalment definits (com veurem més endavant) per mitjà de l'ordre i hom introdueix també una classe d'ordinals, mitjançant la qual s'obtenen resultat de la màxima importància i interès. En Geometria, la construcció quadrilateral de Von Staudt i el treball de Pieri en Geometria Projectiva han mostrat com donar als punts, línies i plans un ordre independent de consideracions mètriques i de la quantitat. Més encara, tota la filosofia de l'espai i el temps depèn del punt de vista en què considerem l'ordre. Així, una discussió de l'ordre, que és absent en les filosofies actuals, ha esdevingut essencial per a la comprensió dels fonaments de les matemàtiques.[1]

Aquesta discussió de l'ordre ocuparà tota la part IV de *Principles*. La conclusió a la qual arriba Russell és que perquè es doni un *ordre* entre objectes del mateix tipus és necessari que es doni una relació *asimètrica* i *transitiva* entre aquests objectes. Aquestes relacions generen, en efecte, les *sèries infinites* d'objectes -nombres naturals, punts, etc- que conté cada branca de les matemàtiques -aritmètica, geometria euclidiana, etc- Ara bé, segons Russell, aquestes relacions no poden ser reduïdes a predicats, per la qual cosa tots els filòsofs anteriors -i, en particular, Kant- no haurien desenvolupat una "filosofia de les matemàtiques satisfactòria" i esdevé necessari el desenvolupament formal de la lògica de relacions. En aquest punt, l'anàlisi històrica de Russell sembla totalment justificada. En efecte, en termes actuals, podríem dir que tant la sil·logística tradicional -a la qual es reduïa, segons Kant, la lògica formal- com la lògica de Peano equivalen essencialment a la *lògica de predicats monàdica*, mentre que la lògica de Russell és equivalent a la *lògica de predicats poliàdica* -això és, a la lògica que s'ocupa no només dels predicats monàdics o unaris, sinó també dels predicats d'aritat més gran (relacions)-, és a dir, a la *lògica quantificacional de primer ordre o superior*. I la diferència fonamental entre una i altra lògica rau, pel que fa a la fonamentació lògica de les matemàtiques, en què mitjançant la primera no podem expressar la noció

1 *Ibid.*, § 187, 199.

d'ordre. Cada branca de les matemàtiques modernes -l'aritmètica de Peano-Dedekind o l'axiomatització de Hilbert de la geometria euclidiana- conté explícitament una *teoria de l'ordre*, això és, una teoria de l'estructura i cardinalitat dels objectes en qüestió -nombres naturals, punts, etc-, que només pot ser expressada en el llenguatge de la lògica de primer ordre. En efecte, qualsevol teoria matemàtica moderna requereix una sèrie infinita d'objectes -nombres naturals, punts, etc, però la lògica monàdica per si sola no permet deduir l'existència d'aquest nombre d'objectes, si no és afegint-hi axiomes extralògics que continguin ja la noció d'infinit. En canvi, la lògica de primer ordre permet deduir l'existència d'una sèrie d'aquest tipus postulant, per exemple, que una certa relació R és *asimètrica* i *transitiva*, *i.e.* una relació d'*ordre*, mitjançant els dos axiomes següents:

$$\forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$$

$$\forall x \forall y \forall z (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$$

i, postulant llavors l'existència d'un nombre infinit d'objectes mitjançant l'axioma:

$$\forall x \exists y Rxy$$

Aquest axiomes s'expressen efectivament mitjançant la lògica poliàdica de primer ordre. Cal notar, tanmateix, que el fet essencial per poder demostrar l'existència d'un nombre infinit d'elements no és la presència de relacions, sinó la *dependència quantificacional* que figura en la darrer equació, és a dir, la forma lògica $\forall x \exists y$, la qual expressa formalment la idea d'un procés iteratiu infinit. Ara bé, aquesta dependència quantificacional és un tret característic de la lògica poliàdica enfront de la lògica monàdica, car en aquesta última tota fórmula és equivalent a una altra fórmula en la qual cap quantificador caigui dins de l'abast o domini d'un altra -així, per exemple, $\forall x \exists y (Fx \rightarrow Gy)$ és equivalent a $\exists x Fx \rightarrow \exists y Gy$.

La tercera i última causa de l'error kantià consistent a considerar com a diferents el raonament matemàtic i el raonament lògic seria, segons assenyalava Russell, la inferioritat lògica de les matemàtiques a l'època de Kant. Cal tenir en compte, en efecte, que les matemàtiques que Kant prengué com a punt de referència per a la seva teoria del coneixement eren la geometria euclidiana i el *càlcul de fluxions* newtonià -l'anàlisi real, en termes actuals. En la primera, tal com assenyala Russell, es feia un ús essencial de les figures geomètriques en les demostracions dels teoremes a partir dels axiomes d'Euclides, per la qual cosa Kant podia afirmar que "les matemàtiques de l'extensió (la geometria), junt amb els seus axiomes, es basa en aquestes successives síntesis [la generació gradual de les parts d'una línia a partir d'un punt] de la imaginació productiva en la generació de figures".[1] Per la seva banda, el càlcul de fluxions de Newton feia un ús essencial de la idea de moviment i, per tant, de temps. En concret, Newton considerava les quantitats matemàtiques -les variables, en terminologia actual- com "generades per un moviment continu" *i.e* com quantitats que varien respecte al temps i, per això, les anomenava *fluents*. Consegüentment, considerava la derivada o tangent d'un punt en una corba com la velocitat de canvi d'un d'aquests fluents respecte al temps i, per això, l'anomenà la seva *fluxió*. Kant va fer seva aquesta interpretació dinàmica o cinemàtica del càlcul, com mostra el següent text:

> L'espai i el temps són *quanta continua* [...] Aquestes quantitats [*Grössen*] podrien anomenar-se també fluents [*fliessende*], donat que la síntesi (de la imaginació productiva) en la seva generació és una progressió en el temps, la continuïtat del qual es designa més pròpiament per l'expressió "fluir" ("fluir a través").[2]

Ara bé, tant la geometria euclidiana com el càlcul de fluxions newtonià havien estat clarament superats en el període que va de Kant a Russell. Respecte a la primera, tal com assenyala Russell, el descobriment de les geometries no euclidianes per Lobačevskij i Bolyai havia fet que els geòmetres es fixessin cada cop més en distints sistemes deductius -inconsistents entre si, pero internament autoconsistents. D'aquesta manera, continua Russell, "la Geometria ha esdevingut (el que abans es deia erròniament) una branca de les matemàtiques pures, és a dir, una disciplina en la qual les assercions són que tals i tals conseqüències se segueixen de tals i tals premisses, no que les entitats com les que descriuen les premisses existeixen realment".[3] En altres paraules, en contra del que pensava Kant, la geometria no descriu l'espai actual i, per tant, no depèn d'ell. Més encara, continua Russell, "ara s'ha provat (la qual cosa és fatal per a la filosofia kantiana) que tota la geometria és estrictament deductiva, i no empra cap altra forma de raonament que les que s'apliquen a l'Aritmètica i a totes les altres ciències deductives".[4] Anàlogament, la tasca de fonamentació del càlcul empresa per Bolzano, Cauchy i Weiertrass hauria dut a abandonar les dues teories

1 *Kant 1968*, 150 (B 204).
2 *Ibid.*, 154 (B 211-212).
3 *Russell 1903*, § 353, 373.
4 *Ibid.*, § 353, 374.

pioneres del càlcul: el càlcul de fluxions de Newton i el càlcul infinitesimal de Leibniz. Russell es prou clar en aquest respecte:

> Abans es pensava -i aquí rau la força real de la filosofia de la matemàtica kantiana- que la continuïtat feia una referència essencial a l'espai i el temps, i que el Càlcul (com la paraula fluxió suggereix) pressuposava d'alguna manera el moviment o, com a mínim, el canvi. En aquesta perspectiva, la filosofia de l'espai i el temps era anterior a la del continu, l'Estètica Transcendental precedia a la Dialèctica Transcendental, i les antinòmies (si més no, les matemàtiques) eren essencialment espai-temporals. Tot això ha estat modificat per les matemàtiques modernes.[1]

La continuïtat ofereix certament un bon exemple de com la filosofia de la matemàtica kantiana s'havia vist refutada per la matemàtica moderna. D'acord amb el càlcul de fluxions, una corba generada per un moviment continu tenia una tangent en cada punt, és a dir, tota corba contínua era diferenciable a tot arreu. Però, en el segle XIX es van trobar nombrosos contraexemples a aquesta tesi, la qual cosa va estar un dels motius més poderosos que va empènyer als matemàtics a fonamentar rigorosament el càlcul. Això va dur a basar el càlcul en la noció de *límit*, la qual al mateix temps es basava en la noció de *convergència*. Així, segons Cauchy, una successió $a_1, a_2, ...$ convergeix si

$$\forall\varepsilon\exists N\forall m\forall n[m, n > N \rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon],$$

on ε és un nombre racional positiu i N, m i n són nombres naturals. I, una successió $a_1, a_2, ...$ convergeix cap a un límit r si

$$\forall\varepsilon\exists N\forall m[m > N \rightarrow |a_m - r| < \varepsilon].$$

Aquestes definicions reemplacen, en efecte, la noció intuïtiva de convergència basada en el moviment, per una noció formal expressable en primer ordre i en la qual juguen un paper clau la relació d'*ordre* i la *dependència quantificacional*. En suma, els progressos en matemàtiques posteriors a Kant mostren que el raonament matemàtic és independent de les intuïcions d'espai i temps. Ara bé, com ja hem dit, la demostració plena de la independència de les matemàtiques respecte de l'espai i el temps depèn, per a Russell, de la possibilitat de

[1] *Ibid.*, § 249, 259.

reduir les matemàtiques a la lògica. Per assolir aquesta tasca, Russell es basa en els treballs previs de Cauchy, Dedekind i Cantor. Aquests autors havien mostrat, en efecte, que els nombres reals es poden introduir a partir dels nombres racionals i que aquests es poden introduir a partir dels nombres sencers. En ambdós casos, la reducció utilitzava la teoria de conjunts, que Cantor desenvoluparia fins a límits insospitats fins aleshores, convertint-la així en la base de les matemàtiques modernes. Les dues tasques pendents eren llavors la reducció dels nombres sencers a la teoria de conjunts i la reducció d'aquesta a la lògica pura. La reducció de l'aritmètica a la lògica s'emprèn a la part II de *Principles*, que Russell enceta amb el text següent:

> Hem examinat fins ara el conjunt de nocions lògiques generals amb les quals les Matemàtiques operen. En aquesta Part, mostrarem com aquest conjunt és suficient, sense nous indefinibles o nous postulats, per establir tota la teoria dels cardinals sencers com una branca especial de la Lògica. Cap disciplina matemàtica ha fet, en els anys recents, avenços més grans que la teoria de l'Aritmètica. El moviment en favor de la correcció en la deducció, inaugurat per Weiertrass, ha estat continuat brillantment per Dedekind, Cantor, Frege i Peano i assoleix el que sembla el seu objectiu final mitjançant la lògica de relacions.[1]

El primer pas en la reducció de l'aritmètica a la lògica consisteix en la definició, en termes purament lògics, de la noció de *nombre*. Per això, Russell exposarà en primer lloc la *definició per abstracció* de nombre de G. Peano i la sotmetrà a crítica. En primer lloc, assenyala Russell, "cal admetre que els nombres són aplicables essencialment a les classes", això és, "han de considerar-se com a propietats de les classes".[2] Ara bé, ¿sota quines circumstàncies dues classes tenen el mateix nombre, és a dir, són *semblants*? Segons Russell, "dues classes tenen el mateix nombre quan, i només quan, existeix una relació injectiva tal que el seu domini inclou una d'aquestes classes i la classe de correlats dels termes d'aquesta classe és idèntica a l'altra classe".[3] La importància d'aquesta definició rau, segons Russell, en què permet expressar la noció de *semblança* en termes purament lògics -més exactament, en termes de la lògica de relacions- i evitar així la referència a *processos* psicològics com ara el *contar* -en clara al·lusió a Kant. En efecte, Russell defineix la relació de *semblança* [*similarity*] en l'article "The Logic of Relations" de 1901 en els termes següents:

1 *Ibid.*, § 107, 111.
2 *Ibid.*, § 109, 112 i 113.
3 *Ibid.*, § 109, 113.

$$u, v \in \mathrm{Cls} \cdot\supset: u \ \mathrm{sim}\ v \cdot = \cdot \exists\ 1 \to 1 \cap R \ni (u \supset \rho \cdot \breve{\rho}u = v),$$ [1]

on ρ representa el domini de R, $\breve{\rho}u$ el seu rang restringit a *u,* $\ni$ la noció primitiva *tal que* i

$$1 \to 1 = (\mathrm{Nc} \to 1) \cap (1 \to \mathrm{Nc}),$$

on

$$\mathrm{Nc} \to 1 = Rel \cap R \ni \{xRy \cdot xRz \cdot\supset_x y1'z\},$$

$$1 \to \mathrm{Nc} = Rel \cap R \ni \{yRx \cdot zRx \cdot\supset_x \ \cdot y1'z\},$$

i $1'$ és la relació d'identitat (Nc → 1 és, doncs, la classe de relacions funcionals (*many one*, en la terminologia de Russell), 1 → Nc és la classe de relacions converses a les de Nc → 1 i, per tant, 1 → 1 representa la classe de funcions injectives (*one to one*).[2] Evidentment, la relació de *semblança* és reflexiva, simètrica i transitiva i, per tant, és una relació d'*equivalència*. Ara bé, assenyala Russell, "aquestes tres propietats d'una relació són considerades per Peano i el sentit comú com indicadores que, quan la relació es compleix entre dos termes, aquests dos termes tenen una certa propietat en comú, i *viceversa*. Aquesta propietat comú l'anomenem el seu nombre. Aquesta és la definició dels nombres per abstracció".[3] A *Notations de logique mathématique* (*1894*) Peano havia introduït, en efecte, les definicions per abstracció de la manera següent:

> Sigui u un objecte; per abstracció hom dedueix un objecte nou φu; hom no pot pas formar una igualtat
>
> $$\varphi u = \text{expressió coneguda}$$
>
> car φu és un objecte de naturalesa diferent de tots aquells que hom ha considerat fins ara. Hom defineix llavors una igualtat posant:
>
> $$h_{u,v} \cdot\supset \cdot \varphi u = \varphi v \cdot = \cdot p_{u,v} \qquad \mathrm{Df.}$$

1 *Russell 1993*, 320.
2 *Ibid.*, 319.
3 *Russell 1903*, § 109, 114.

on $h_{u,v}$ és la hipòtesi sobre els objectes u i v i $\varphi u = \varphi v$ és la igualtat que hom defineix i significa la mateixa cosa que $p_{u,v}$, la qual és una condició o relació entre u i v, la qual té una significació ben coneguda.[1]

Hom pot il·lustrar aquesta forma general de les *definicions per abstracció* amb els següents exemples, extrets de la geometria euclidiana.

1. Si u i v són triangles, llavors l'àrea de u i *de* v són iguals si, i només si, u és equivalent a v.
2. Si u i v són figures planes, llavors la forma de u i de v són iguals si, i només si, u és semblant a v.
3. Si u i v són rectes, llavors la direcció de u i de v són iguals si, i només si, u és paral·lela a v.[2]

Així doncs, tal com assenyalava Russell en el passatge abans esmentat, les definicions per abstracció permeten passar de l'expressió d'una relació d'equivalència (equivalència geomètrica, semblança, paral·lelisme) entre dos objectes del mateix tipus (triangles, figures planes, rectes) a l'expressió d'una identitat respecte a una propietat comuna (àrea, forma, direcció) a aquests objectes. D'altra banda, afirma Russell, donat que, segons Peano, la noció de funció proposicional és definible en termes de la noció de classe i de pertinença d'un individu a una classe i que la igualtat es definible en el llenguatge de la lògica de classes en els següents termes:

$$(x = y) = [(u)(x \in u \equiv y \in u)],$$

tenim que les definicions per abstracció són reductibles a la següent forma:

$$(u \in K \cdot v \in K) \cdot\!\supset [((w)(\varphi u \in w \supset \varphi v \in w)) \equiv S(u,v)],$$

la qual cosa mostra clarament que les definicions per abstracció (*i*) tenen com objectiu, d'acord amb el *principi de relacions internes*, que afirma que totes les proposicions de tipus relacional són reductibles a proposicions del tipus subjecte-predicat, reduir les relacions

---

1 *Peano 1958*, § 38, 167-68.

2 *Cf. Vuillemin 1968*, 171.

d'equivalència a la possessió d'un predicat comú i (*ii*) fan un ús inequívoc de les *variables restringides*, la qual cosa té com a conseqüència l'escissió de les matemàtiques en diverses branques. Russell criticarà ambdós punts de vista, d'una banda, oposant al principi de relacions internes el *principi de relacions externes*, el qual afirma que les proposicions relacionals són irreductibles a les proposicions del tipus subjecte-predicat, i reclamant consegüentment, el desenvolupament autònom de la lògica de relacions i, d'una altra, postulant la *teoria de la variable universal*, que afirma que totes les proposicions de la matemàtica pura no contenen sinó constants lògiques i variables universals -no restringides. Tant la lògica de relacions com la teoria de la variable universal són claus en la demostració de la tesi logicista i, per això, la crítica de Russell a les definicions per abstracció de Peano s'ha d'entendre com una peça clau en la defensa de la tesi logicista.

Tornant ara a la definició peaniana de nombre cardinal cal dir, en primer lloc, que respon plenament a la forma general de les definicions per abstracció abans esmentada. Ella és, en efecte, la següent:

$$a, b \in Cls \supset \{(\mathrm{Num}a = \mathrm{Num}b) = (\exists(bfa)rcp)\}$$

on *rcp* indica que la funció *f* és una correspondència biunívoca entre *a* i *b* i, per tant, la condició $\exists(bfa)rcp$ expressa l'existència d'una relació d'equivalència -la semblança- entre *a* i *b*, que dóna lloc a la propietat "nombre cardinal de". Ara bé, Russell es mostra crític respecte a aquesta definició car, segons ell, "pateix d'un defecte formal absolutament fatal: no demostra que només un objecte satisfà la definició. Així, en lloc d'obtenir *una* propietat comuna de classes semblants, que sigui *el* nombre de les classes en qüestió, obtenim una *classe* de propietats d'aquesta mena, amb cap possibilitat de decidir quants de termes conté aquesta classe".[1] I aquesta crítica, assegura Russell, és extensible a les definicions per abstracció en general. Segons afirma Russell a "The Logic of Relations", les definicions per abstracció es basen en la següent proposició (P. 6.2):

$$R \in rel \cdot R^2 \supset R \cdot R = \breve{R} \cdot \exists\, R \cdot\!\supset\cdot \exists\, \mathrm{Nc} \rightarrow 1 \cap S \ni (R = S\breve{S}).$$ [2]

1 *Russell 1903*, § 109, 114-15.
2 *Russell 1993*, 320.

Aquesta proposició, en efecte, "afirma que totes les relacions que són transitives, simètriques i no nul·les poden ser analitzades com productes d'una relació funcional i la seva conversa, i la demostració ens mostra una manera de fer això, sense provar que no hi hagi una altra manera de fer-ho. P. 6.2 es pressuposada en les definicions per abstracció i mostra que, en general, aquestes definicions no donen un individu únic sinó una classe, donat que la classe de relacions *S* no és, en general, un element. Per a cada relació *S* d'aquesta classe i per a tots els elements *x* de *R*, hi ha un individu que la definició per abstracció indica, però les altres relacions *S* no donen, en general, el mateix individu".[1] Per aquest motiu, la definició de la classe dels nombres *Nc* com el rang de la relació *S*, que Russell proposa en el primer esborrany de "The Logic of Relations":

$$sim = S \cdot \breve{S} \cdot\supset \cdot \mathrm{Nc} = \breve{\sigma},$$

no pot donar la classe dels nombres, car *S* no està determinada unívocament i, per aquest motiu, no la incorpora a la versió definitiva de l'article. En aquesta, en canvi, Russell proposa, donada qualsevol relació *R*, considerar la classe d'equivalència d'un terme *u* com "l'individu indicat per la definició per abstracció; així, per exemple, el nombre cardinal d'una classe *u* serà la classe de classes semblants a *u*".[2] Aquesta és precisament la definició que Russell adoptarà a *Principles* i derivarà allí de l'anomenat *principi d'abstracció*, el qual s'enuncia en els termes següents:

> Tota relació transitiva i simètrica, de la qual hi ha al menys una instància, és analitzable en la possessió conjunta d'una nova relació a un nou terme, essent la nova relació de tal mena que cap terme pot tenir aquesta relació amb més d'un terme, però la seva conversa no té aquesta propietat.[3]

Aquest nou terme serà evidentment la classe d'equivalència de la relació en qüestió. Així, si hom considera la relació de semblança entre classes:

> [Hom pot] definir el nombre d'una classe com la classe de totes les classes semblants a la classe donada. La pertinença a aquesta classe de classes (considerada

[1] *Ibid.*, 320.
[2] *Ibid.*, 596.
[3] *Russell 1903*, § 210, 220.

com un predicat) és una propietat comuna de totes les classes semblants i de cap altra; més encara, cada classe del conjunt té respecte del conjunt una relació que no té amb res més i que cada classe té amb el seu propi conjunt [...] Aquesta és, llavors, una definició irreprotxable del nombre d'una classe en termes purament lògics.[1]

És tracta, en definitiva, de la mateixa definició que Frege havia donat de nombre cardinal i a la qual Russell hi arribà independentment a través de la reflexió i crítica a la definició per abstracció de Peano. A més, conclou Russell, aquesta definició de nombre cardinal, permet la deducció de totes les propietats usuals dels nombres, tant finits com infinits. Russell definirà, en efecte, la suma, multiplicació i exponenciació en termes purament lògics a partir de la definició anterior de nombre, essent aquestes definicions aplicables tant als nombres finits com infinits. A continuació distingirà entre classe infinita i classe finita, oferint dues definicions de classe infinita que considera equivalents -encara que, en la introducció a la segona edició aclareix que això "només pot ser provat si s'assumeix l'axioma multiplicatiu".[2] En realitat el que fa Russell és definir la classe dels nombres finits, ja sigui com la classe de totes les classes de classes que no són semblants a cap part pròpia o "com la classe de nombres que està continguda en tota classe *S* a la qual pertany 0 i el successor de tot nombre pertanyent a *S*, on el successor d'un nombre és el nombre obtingut sumant 1 al nombre donat".[3] Finalment, Russell procedeix a la reducció de l'aritmètica de Peano a la lògica. Peano havia desenvolupat l'aritmètica finita en el seu *Formulaire des mathématiques* (*1895-1908*) a partir de tres idees matemàtiques primitives: *sencer finit -i.e. nombre natural-*, *zero* i *successor* -a les quals calia afegir-hi evidentment les idees primitives de la lògica- i els cinc axiomes següents:

(1) 0 és un nombre natural
(2) Si *a* és un nombre, el successor de *a* és un nombre
(3) Si dos nombres tenen el mateix successor, els dos nombres són idèntics
(4) 0 no és el successor de cap nombre
(5) Si *s* és una classe a la qual pertany 0 i també el successor de qualsevol nombre pertanyent a *s*, llavors tot nombre pertany a *s* (principi d'inducció).[4]

---

1 *Ibid.*, § 111, 115.

2 *Ibid.*, viii-ix.

3 *Ibid.*, § 119, 123.

4 La única diferència entre aquest conjunt d'axiomes i el de *Arithmetices principia, novo methodo exposita* (*Peano 1889*), és la substitució del 1 pel 0 com a idea primitiva (*Cf. supra*, cap. IV,

A partir d'aquests indefinibles i axiomes, junt amb els axiomes per la igualtat aritmètica, Peano defineix les operacions aritmètiques bàsiques i estableix a partir d'aquí les propietats usuals dels nombres naturals. Així, per a la reducció de l'aritmètica finita a la lògica, calia definir en termes de la lògica pura les tres nocions primitives abans esmentades i demostrar els cinc axiomes anteriors. "Nombre natural" ja ha estat definit anteriorment i "0" es defineix com la classe de classes l'únic membre de la qual és la classe buida. Per definir l'operació "successor", Russell defineix el nombre 1 i esmenta la necessitat de demostrar que si dues classes són similars i se'ls afegeix una classe d'un terme a cada una d'elles, llavors obtenim classes semblants. En aquestes circumstàncies, en efecte, si *n* és el nombre d'una classe, $n+1$ serà el nombre de la classe resultant d'afegir una unitat a la classe en qüestió i s'anomenarà el *successor* de *n*. Amb aquestes definicions, la definició oferta més amunt de la classe dels nombres naturals queda completament determinada i només resta verificar llavors que aquesta classe satisfà els cinc axiomes de Peano, la qual cosa és immediata. Fins aquí hem dibuixat les línies mestres del programa de reducció de l'aritmètica a la lògica esbossat per Russell a *Principles*. Per a la reducció de les altres branques de les matemàtiques, Russell es basa en aquest resultat i en els principals resultats assolits al llarg del segle XIX en anàlisi i geometria -alguns dels quals ja han estat esmentats al llarg d'aquest secció. Així, per exemple, Russell defineix els nombres racionals com raons o *ratios* de nombres naturals, això és, com relacions injectives entre naturals i defineix llavors els nombres reals com una classe especial de nombres racionals, basant-se per això en els treballs de Weiertrass, Cantor i Dedekind, però mostrant-se crític alhora amb alguns dels seus punts de vista -Russell insisteix sovint, per exemple, en la necessitat de les proves d'existència que ens assegurin que aquestes definicions s'apliquen a alguna cosa determinada.

2. El càlcul proposicional

Un cop esbossada en la secció anterior la filosofia de la matemàtica de *Principles*, centrarem la nostra atenció en l'estudi dels *indefinibles* de la matemàtica que, d'acord amb el logicisme russellià, pertanyeran evidentment a la lògica pura. Per això, tal com ja havíem anunciat al començament de la secció anterior, exposarem en aquesta i les

§ 9).

seccions següents els trets essencials de la lògica de *Principles*, fent especial èmfasi en l'explicació del indefinibles de cada una de les seves branques. En aquesta secció analitzarem el *càlcul proposicional* o, com també en diu sovint Russell, la *teoria de la deducció*.

Segons Russell, les relacions d'*implicació material* i *implicació formal*, ultra la noció de *veritat*, que la matemàtica *usa* pero que no és un constituent de les proposicions que considera,[1] són els únics *indefinibles* o idees primitives que requereix el càlcul proposicional. Per contra, les idees de *proposició*, *asserció* i *negació* són derivades. A més de les idees anteriors, el desenvolupament del càlcul proposicional requereix deu proposicions indemostrables o axiomes, encara que, tal com assenyala Russell, aquest nombre "podria ser susceptible d'una reducció ulterior", car respecte d'alguna d'aquestes proposicions no hi cap raó "per considerar-les com indemostrables, llevat del fet que han romàs fins ara indemostrables".[2] El càlcul proposicional "estudia la relació d'implicació entre proposicions", això és, la implicació material, que "s'ha de distingir de la relació d'implicació formal, que es dóna entre funcions proposicionals quan una implica l'altra per a tots els valors de la variable".[3] Tanmateix, encara que el càlcul proposicional no estudiï explícitament la implicació formal, la pressuposa implícitament. Russell explica aquest fet amb l'exemple següent, que il·lustra també la diferència entre ambdós tipus d'implicació:

> La cinquena proposició d'Euclides se segueix de la quarta: si la quarta és vertadera, també ho és la cinquena, mentre que si la cinquena és falsa, també ho és la quarta. Aquest és un cas d'implicació material, car ambdues proposicions són constants absolutes, no depenent el seu significat de l'assignació d'un valor a una variable. Però cada una d'elles *enuncia* una implicació formal. La quarta enuncia que si x i y són triangles complint certes condicions, llavors x i y són triangles complint certes altres condicions, i que aquesta implicació és compleix per a tots els valors de x i y; i la cinquena enuncia que si x és un triangle isòsceles, x té els angles a la base iguals. La implicació formal inclosa en cada una d'aquestes dues proposicions és una cosa ben diferent de la implicació material que es dóna entre les dues proposicions com a tots.[4]

---

1 *Ibid.*, § 1, 3.
2 *Ibid.*, § 17, 15-16.
3 *Ibid.*, § 15, 14.
4 *Ibid.*, § 15, 14.

Així doncs, la noció d'implicació formal implícita en el càlcul proposicional és la d'una relació que lliga gràcies al *quantificador universal* dues *funcions proposicionals*, entenent-se aquestes com a funcions d'un o més arguments que prenen els seus valors en un domini d'individus i tals que l'assignació d'un d'aquests valors les transforma en una proposició. Una implicació formal d'aquesta mena és, doncs, una expressió del tipus (en notació moderna):

$$\forall x_1, ..., \forall x_n (Px_1, ..., x_n \rightarrow Qx_1, ..., x_n),$$

això és, "Per a tot $x_1, ..., x_n$, "$x_1, ..., x_n$ tenen la propietat P" implica "$x_1, ..., x_n$ tenen la propietat Q", on $x_1, ..., x_n$ són variables individuals.[1] En qualsevol cas, tal com explicarem després, el càlcul proposicional proposat per Russell a *Principles* és un *càlcul proposicional ampliat*, el qual no només pressuposa implícitament la noció de funció proposicional, sinó que empra explícitament un tipus particular de funció proposicional en què les variables lligades pel quantificador universal són variables proposicionals. Aquest és el motiu pel qual Russell introdueix la implicació formal com un indefinible del càlcul proposicional.

Pel que fa a la *implicació material*, Russell rebutja explícitament definir-la a partir de la noció de *veritat*, car en una definició d'aquesta mena es cau sempre en un cercle viciós. En efecte, afirmar que "*p implica q*" és equivalent a l'asserció que *p* és *falsa* o que *q* és *vertadera* no pot ser una definició de la implicació perquè l'*equivalència* no és més que la implicació mútua entre *definiens* i *definiendum*. En canvi, la idea de *proposició* és definible en termes de la relació d'*implicació*. En efecte, d'acord amb Russell, "tota proposició s'implica a ella mateixa, i tot el que no és una proposició no implica res. D'aquí que dir "*p* és una proposició" sigui equivalent a "*p* implica *p*"; i aquesta equivalència podria emprar-se per definir les proposicions".[2] Així doncs, a diferència de Frege, el qual havia introduït independentment les nocions de *proposició* i *implicació* a partir dels *valors de veritat*, considerats com a indefinibles, Russell considera la relació d'*implicació* com a indefinible i

[1] A *Principles*, Russell no introdueix una notació específica per a la implicació, la negació, el quantificador i altres signes necessaris per desenvolupar el càlcul de proposicions allí exposat. El mateix s'esdevé amb la majoria de les nocions primitives i definides del càlcul de classes i de relacions. Així, per a la formalització dels axiomes, teoremes, definicions, etc, exposats a *Principles*, emprarem normalment la notació moderna estàndard que emprem al llarg de tot el nostre estudi, però com que molt sovint farem referència a la formalització duta a terme a *Principia* d'aquestes fórmules, emprarem també la notació peaniana que Russell utilitza en aquesta obra i en la majoria dels seus articles sobre lògica i matemàtiques.

[2] *Ibid.*, § 16, 15.

defineix a partir d'ella la noció de *proposició*, la qual cosa el dispensa de recórrer a la noció de veritat, en consonància amb l'estatus especial que atorga a aquesta noció. D'acord amb la definició anterior de proposició, els tres primers axiomes del càlcul proposicional de *Principles*:

(1) Si *p* implica *q*, llavors *p* implica *q*,
(2) Si *p* implica *q*, llavors *p* implica *p*,
(3) Si *p* implica *q*, llavors *q* implica *q*,

estipulen, segons Russell, que: (1) qualsevol cosa que *p* i *q* puguin ser, "*p* implica *q*" és una proposició, (2) qualsevol cosa que sigui *q*, si *p* implica *q*, llavors *p* és una proposició i (3) qualsevol cosa que sigui *p*, si *p* implica *q*, llavors *q* és una proposició.[1] Aquests tres axiomes mostren així la interdependència de les idees d'implicació i proposició, car mentre el primer axioma estipula que una implicació és sempre una proposició, independentment dels valors de les variables que figurin en ella, el segon i tercer axioma restringeixen els valors que poden prendre aquestes variables a proposicions. Així, contràriament a Frege, que havia definit la implicació -o, millor dit, el condicional- com una funció que pot prendre com *x-argument* i *y-argument* dos objectes qualssevol, Russell restringeix mitjançant dos axiomes el rang de valors de les variables i, per consegüent, els termes que poden figurar en una implicació.

A més de les idees primitives d'*implicació material* i *implicació formal*, la matemàtica empra la noció de *veritat*. Com veurem més endavant, aquest indefinible s'*usa* fonamentalment en la teoria de classes, "fent-se'n en el càlcul proposicional només un ús molt misteriós [*a very shadowy use*]".[2] Per explicar l'ús que el càlcul proposicional fa de la noció de veritat, cal que ens referim primerament a una noció que està estretament lligada amb aquesta, a saber, la noció d'*asserció* [*assertion*] i al difícil problema de la consegüent "distinció entre una proposició afirmada de fet [*actually asserted*] i una proposició considerada merament com un concepte complex".[3] És clar que, assenyala Russell, des d'un

---

[1] D'acord amb aquesta interpretació, el primer axioma hauria de ser, en realitat, de la forma:

Si *p* implica *q*, llavors (*p* implica *q*) implica (*p* implica *q*),

sobretot si es té en compte que, com veurem més endavant, "si … , llavors" cal interpretar-lo com una implicació formal, no com una implicació material, a partir de la qual es defineixen les proposicions.

[2] *Ibid.*, § 84, 88.

[3] *Ibid.*, § 38, 34.

punt de vista lògic, una proposició afirmada com ara "*p* implica *q*" *afirma* una implicació, però no afirma *p* o *q*, sinó que només *considera* aquestes proposicions. Per tant, si *p* implica *q*, això és, si "*p* implica *q*" és vertadera, llavors aquesta proposició pot ser *afirmada*. En altres paraules, "les proposicions vertaderes tenen una qualitat que no pertany a les falses, una qualitat que, en un sentit no psicològic, pot anomenar-se ser afirmada".[1] L'ús que fa el càlcul proposicional de la noció d'asserció i la conseqüent distinció entre proposició *afirmada* i *considerada* pot explicar-se també a partir de la diferència entre l'axioma 4 de *Principles*:

"Una hipòtesi vertadera en una implicació pot eliminar-se i el conseqüent afirmar-se"

i el *principi d'asserció*: "Si *p* i "*p* implica *q*" llavors *q*" o, el que és el mateix, entre la proposició primitiva de *Principia Mathematica*:

∗1.1. Tot allò implicat per una proposició elemental vertadera és vertader

i el teorema:

$$*3.35. \vdash : p \cdot p \supset q \cdot \supset \cdot q$$

de la mateixa obra.[2] Segons afirma Russell a *Principles*, l'axioma anterior expressa un principi que "eludeix l'enunciació formal i apunta a una certa insuficiència del formalisme en general. El principi s'empra sempre que es diu d'una proposició que ha estat *provada*, perquè el que s'esdevé, en tots aquests casos, és que s'ha mostrat que la proposició és implicada per alguna proposició vertadera".[3] L'axioma expressa, en definitiva, la regla d'inferència que permet deduir de l'asserció de *p* i de l'asserció de "*p implica q*", l'asserció de *q*, això és, la regla de *separació* o *modus ponens*. Ara bé, aquesta regla no és hipotètica, sinó que afirma, per exemple, la veritat de *p* i per això "no podem expressar simbòlicament el principi perquè, en certa manera, qualsevol simbolisme en el qual *p* és variable només ofereix la *hipòtesi* que

1 *Ibid.*, § 38, 35.

2 La numeració precedida d'un asterisc és típica de *Principia Mathematica* i, quan no s'indiqui el contrari, remetrà sempre a aquesta obra, encara que no sigui esmentada explícitament. Com podem veure, Russell empra a *Principia* el signe d'asserció fregeà, del qual a *Principles* només en fa referència en l'apèndix A (*Ibid.*, § 477, 503). Tal com veurem després, aquest signe és introduït per Russell, per primera vegada, en l'article "The Theory of Implication" (*1906*$_a$).

3 *Russell 1903*, § 38, 34.

p sigui vertadera, però no el *fet* que sigui vertadera".[1] En canvi, el *principi d'asserció*: "Si *p* i "*p* implica *q*", llavors *q*", "es compleix igualment quan *p* no és vertadera i quan *p* no implica *q*. No ens permet, com el principi que ens ocupa, afirmar *q* sense cap hipòtesi".[2] La diferència que hi ha entre l'axioma 4 i el principi d'asserció es deriva, assenyala Russell, de la diferència que hi ha entre la relació expressada per la paraula "doncs" [*therefore*] i la paraula "implica" [*implies*]: "Quan diem *doncs*, enunciem una relació que només pot complir-se entre proposicions afirmades, i que difereix així de la implicació. Sempre que apareix *doncs*, la hipòtesi pot ser eliminada, i la conclusió afirmada per ella mateixa".[3] El procés d'inferència es basa, en definitiva, en la relació expressada per *doncs*, que requereix ensems la noció d'*asserció*, a través de la qual el càlcul proposicional *usa* la noció de *veritat*.

La resta d'axiomes de *Principles* constitueixen, segons Russell, els veritables *principis d'inferència* del càlcul proposicional. Per a la seva formulació empra, com farà també a *Principia Mathematica*, la *conjunció* o *producte lògic* de dues proposicions, la definició de la qual -*altament artificial*, com reconeix Russell- és com segueix: "Si *p* implica *p*, llavors, si *q* implica *q*, *pq* significa que si *p* implica que *q* implica *r*, llavors *r* és vertadera".[4] Aquests axiomes són els següents:

(5) Si *p* implica *p* i *q* implica *q*, llavors *pq* implica *p* (*Simplificació*),
(6) Si *p* implica *q* i *q* implica *r*, llavors *p* implica *r* (*Sil·logisme*),
(7) Si *q* implica *q* i *r* implica *r*, i si *p* implica que *q* implica *r*, llavors *pq* implica *r* (*Importació*),
(8) Si *p* implica *p* i *q* implica *q*, aleshores, si *pq* implica *r*, llavors *p* implica que *q* implica *r* (*Exportació*),
(9) Si *p* implica *q* i *p* implica *r*, llavors *p* implica *qr* (*Composició*),
(10) Si *p* implica *p* i *q* implica *q*, llavors ""*p* implica *q*" implica *p*" implica *p* (*Reducció*).[5]

L'origen d'aquest sistema d'axiomes es troba en el sistema proposat per Peano en l'obra *Formulaire de mathématiques*, el qual comprèn els sis principis següents: *sil·logisme*,

[1] *Russell 1910*, 155.
[2] *Ibid.*, 94.
[3] *Russell 1903*, § 38, 35.
[4] *Ibid.*, § 18, 16.
[5] *Ibid.*, § 18, 16-17.

composició, *importació*, *exportació*, *substitució* i *simplificació*.[1] Com podem veure, la diferència fonamental entre el sistema de Russell i el de Peano és que el primer no incorpora el principi de *substitució* del segon i, en canvi, hi afegeix el principi de *reducció*. Que Russell no incorpori en el seu sistema d'axiomes el *principi de substitució* com un axioma més sembla lògic, donat que la formulació peaniana d'aquest principi es fa en el metallenguatge, per la qual cosa Russell l'hauria considerat, en el millor dels casos, com una *regla* de naturalesa anàloga al modus ponens. Amb tot, el fet que Russell no introduís explícitament aquesta regla al costat del modus ponen en la seva presentació del càlcul proposicional de *Principles*, sembla indicar que, en escriure aquesta obra, Russell devia considerar que hom podia prescindir de la *regla de substitució* en la presentació del càlcul. D'una altra banda, tal com afirma Russell, la introducció del *principi de reducció* és necessària per poder demostrar alguns teoremes en els quals hi intervé la negació i, en particular, el principi de *terç exclòs* i la *llei de doble negació*. Precisament, per poder estendre el càlcul de manera que abasti tot el càlcul proposicional clàssic, Russell defineix la negació. Com que, segons Russell, *no-p* és equivalent a l'asserció que *p* implica qualsevol proposició, es defineix la negació de *p* de la següent manera: "Si *p* implica *p*, llavors si *r* implica *r*, no *p* significa que *p* implica *r*, qualsevol que sigui *r*".[2] Veiem, doncs, que l'expedient seguit per Russell per introduir la negació és anàleg al de Peirce (*Cf. supra*, cap. III, § 9) i consisteix essencialment a definir la negació d'una proposició estipulant que aquesta proposició implica qualsevol proposició. L'altre procediment habitual, que es remunta a Wajsberg, i que consisteix a introduir una constant *o* que representi el fals i a definir la negació d'una proposició estipulant que "p implica *o*", seria contrari al logicisme russellià que prohibeix el recurs a constants extralògiques. Tal com ha explicat Vuillemin en l'obra *Leçons sur la première philosophie de Russell* (*1968*):

> Dans les *Principles*, Russell use d'un procédé d'extension tout différent, même s'il a pu inspirer celui de Wajsberg. Considérant que les propositions des mathématiques et de la logique doivent posséder une validité universelle et indépendant de leurs contenus, il s'interdit *a priori* d'introduire des constantes dans les propositions de ces sciences. On dira sans doute que la constante de Wajsberg peut être considérée comme une constante "logique", dans la mesure où elle illustre par une instance la classe de toutes les propositions fausses. Mais, comme le note

---

1 *Peano 1901*, 9-11.

2 *Russell 1903*, § 19, 18.

> Russell, le notions de vrai et de faux sont utilisées par les propositions mathématiques ou logiques; elles tiennent à la meta-langue de la logique, non à sa langue-objet et, bien que le procédé de Wajsberg puisse se justifier par des fins méta-linguistiques, c'ést mêler une impureté aux fondements des mathématiques que de l'employer pour définir le connecteur de négation.[1]

Per entendre correctament el càlcul proposicional de *Principles*, cal tenir en compte que, segons Russell, les implicacions expressades en els axiomes i definicions anteriors mitjançant *si ..., llavors* són formals, mentre que les expressades per *implica* són materials.[2] Així, els axiomes i definicions del càlcul proposicional poden considerar-se en definitiva com expressions del tipus:

$$\forall p_1, ..., \forall p_n(\varphi(p_1, ..., p_n) \rightarrow \psi(p_1, ..., p_n))$$

on $\varphi(p_1, ..., p_n)$ i $\psi(p_1, ..., p_n)$ denoten ambiguament funcions proposicionals -definibles en darrer terme a partir de la implicació material-, estipulant $\varphi(p_1, ..., p_n)$ que $p_1, ..., p_n$ són variables proposicionals i essent $\psi(p_1, ..., p_n)$ vertadera per a tots els valors de $p_1, ..., p_n$. Segons Russell, en efecte:

> El càlcul proposicional es caracteritza pel fet que totes les seves proposicions tenen com a hipòtesi i com a conseqüent l'asserció d'una implicació material. Normalment, la hipòtesi és de la forma "*p implica p*", etc, la qual cosa és equivalent a l'afirmació que les lletres que figuren en el conseqüent són proposicions. Així, els conseqüents consisteixen en funcions proposicionals que són vertaderes de totes les proposicions.[3]

Així, per exemple, la llei de *simplificació* (5) té com a hipòtesi l'asserció que *p* i *q* són variables proposicionals i com a conseqüent la funció proposicional "*pq* implica *p*", la qual és vàlida per qualsevol valor de *p* i *q*. El càlcul proposicional *usa* explícitament, doncs, un tipus peculiar d'implicació formal, en la qual la quantificació recau ja no sobre individus sinó sobre proposicions i, per tant, les funcions proposicionals lligades gràcies al quantificador universal tindran també proposicions com arguments. Ara bé, com reconeix el propi Russell,

---

1 *Vuillemin 1968*, 15.
2 *Russell 1903*, § 18, 16 n.
3 *Ibid.*, § 14, 13.

això no fa sinó mostrar-nos que la noció d'implicació formal es pot reduir en últim terme a les nocions de *funció proposicional* i de *tot*.[1] Per tant, el càlcul proposicional de *Principles* no és una teoria intrínsecament definida, sinó que està supeditada a la teoria de la quantificació. Es tracta, doncs, d'un *càlcul proposicional ampliat* [*extended propositional calculus*], en la mesura que la seva formalització requereix, a més de la notació pròpia del càlcul proposicional, la introducció com a símbol primitiu d'un operador, el quantificador universal, essent les variables d'aquest operador les mateixes variables proposicionals.[2] En definitiva, si deixem de banda els tres primers axiomes, que no tenen cap rellevància per al procés deductiu pròpiament dit, podem concloure que el càlcul proposicional de *Principles* té l'estructura següent (en notació moderna):

Variables: $p, q, r, \ldots$

Símbols primitius: $\rightarrow$, $\forall$

Símbols auxiliars: (,)

Definicions:

1. $\forall p \forall q((p \rightarrow p) \rightarrow ((q \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge q) \leftrightarrow \forall r((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow r))))$
2. $\forall p((p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \forall r((r \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))))$

Axiomes:

(1) $\forall p \forall q \forall r(((p \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow q)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r))$

(2) $\forall p \forall q \forall r(((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$

(3) $\forall p \forall q \forall r(((q \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r))$

(4) $\forall p \forall q \forall r(((p \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow q) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)))$

(5) $\forall p \forall q \forall r(((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)))$

(6) $\forall p \forall q(((p \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow q)) \rightarrow (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p))$

Regles d'inferència:

(1) De A i $A \rightarrow B$, podem inferir B (*modus ponens*)

Evidentment, des del punt de vista del rigor contemporani, aquesta presentació del càlcul proposicional presenta algunes mancances, com ara la d'una definició recursiva de fórmula. Russell no fa cap referència quelcom que poguéssim anomenar una definició

[1] Això està implícit ja en la caracterització que fa Russell de la noció d'implicació formal, segons la qual aquesta pren individus com arguments, però, com ja hem vist abans, aquest tipus d'implicació formal només s'usa *implícitament* en el càlcul proposicional.

[2] Vegeu al respecte *Church 1956*, § 28, 151-52 i, en especial, les notes 225 i 226, on es fa referència explícita al càlcul proposicional de *Principles* i a l'article " The Theory of Implication".

recursiva de les fórmules del llenguatge o quelcom similar, encara que la seva definició de proposició podríem considerar que apunta en aquesta direcció. En qualsevol cas, una definició d'aquesta mena es pot afegir fàcilment al seu sistema lògic especificant les regles habituals per a un sistema de lògica proposicional que només conté la implicació (el condicional) com a connectiva primitiva i una regla especial per a les fórmules del tipus $\forall p\varphi(p)$, on p és una variable proposicional i φ una fórmula qualsevol. Per un altre costat, aquesta presentació tampoc és suficient per al procés de deducció pròpiament dit, donat que manca l'explicitació d'algunes regles d'inferència específiques, que són necessàries per dur a terme les derivacions esmentades pel mateix Russell i que, per tant, d'alguna manera, podríem considerar que el càlcul proposicional de Russell ja incorpora implícitament. Es tracta, en concret, de les següent regles: (2) Regla de substitució, (3) Regla d'eliminació del quantificador universal i (4) Regla de transport del quantificador universal. Tal com veurem immediatament, Russell introduirà explícitament totes aquestes regles en l'article "The Theory of Implication" (*1906$_a$*).

La novetat principal del càlcul proposicional presentat a "The Theory of Implication" és que es tracta d'un càlcul intrínsecament definit, d'acord amb la importància que Russell atorga al càlcul proposicional o, com prefereix dir-li ara, a la *teoria de la deducció*, per a la "deducció de les matemàtiques pures a partir dels seus fonaments lògics".[1] Les idees primitives o indefinibles considerats per Russell en aquest article són: l'*asserció*, la *implicació* (material), la *variable*, la noció de *funció proposicional* i la *negació*. Les novetats respecta a *Principles* són, doncs, les idees d'*asserció*, *variable* i *negació*. La idea d'asserció era a *Principles* una idea derivada de la noció primitiva de veritat, la qual tenia allí un *status* especial. Per a representar l'*asserció* d'una proposició, Russell empra el signe $\vdash$, que manlleva de Frege i que, tal com ell mateix reconeix, "es pot llegir com "és veritat que"".[2] A *Principles*, Russell tampoc havia introduït la noció de *variable*, és a dir, el terme *qualsevol* en la terminologia d'aquella obra, com una idea primitiva del càlcul proposicional. S'ha de dir però, que la seva introducció com a indefinible ja era necessària en aquesta obra, perquè les demostracions allí proposades requerien no només l'ús de variables proposicionals lligades, sinó també l'ús de variables lliures. Segons Russell:

> Una lletra sola, a no ser que s'hagi definit particularment que tingui un significat constant, representarà sempre una variable independent. Els valors

1 *Russell 1906$_a$*, 159.

2 *Ibid.*, 161.

> possibles d'una variable independent han d'incloure sempre absolutament totes les entitats. La raó d'això és la següent: Si afirmem algun enunciat sobre *x*, on *x* està restringida per alguna condició, llavors hem d'esmentar la condició per tal que el nostre enunciat sigui acurat; però aleshores el que estem afirmant realment és que la veritat de la condició implica la veritat de l'enunciat original sobre *x*; i això, en virtut de la nostra interpretació de la implicació, serà vàlid encara que la condició no s'acompleixi. L'"univers del discurs", com se sol anomenar, ha de ser reemplaçat per una hipòtesi general relativa a la variable, i llavors les nostres fórmules són vertaderes tant si la seva hipòtesi és vertadera o no, perquè una implicació és vàlida sempre que la seva hipòtesi no és vertadera. La vella teoria de l'"univers" té el defecte d'introduir hipòtesis tàcites, fent així tots els enunciats incomplets, donat que una hipòtesi no deixa de ser una part essencial de les proposicions simplement pel fet que no ens prenem la molèstia d'enunciar-la.[1]

Naturalment, aquesta crítica afecta no solament a la noció d'*univers del discurs* emprada pels lògics del corrent algèbric, sinó també a la presentació del càlcul proposicional duta a terme a *Principles*. Tal com hem vist abans, en efecte, en aquesta obra Russell evita l'ús de variables restringides en la presentació del càlcul proposicional, posant com antecedents dels axiomes del càlcul unes condicions que estipulen, d'acord amb els pseudoaxiomes que determinen la noció de proposició, que les variables s'hagin d'interpretar com a variables proposicionals. Ara bé, d'una banda, el caràcter paradoxal d'aquest procediment que Russell explica molt bé en el text anterior i, d'una altra, les complicacions de tot tipus que genera aquest procediment en la presentació del càlcul proposicional, fan convenient una nova presentació d'aquest que eviti la introducció explícita en els axiomes de cap restricció relativa a les seves variables i, per suposat, que no hagi de recórrer a les variables restringides. En definitiva, l'exigència a "The Theory of Implication" de construir la lògica proposicional a partir de la noció de variable universal i el rebuig a construir-la a partir de la noció de variable restringida, suposa l'abandó definitiu per part de Russell de la concepció peaniana de variable i l'adopció de la fregeana. Tal com veurem més endavant, aquest és un punt important per comprendre la naturalesa del logicisme russellià i les seves diferents propostes per solucionar les paradoxes de la lògica. Finalment, la consideració de la *negació* com un indefinible, permet a Russell exposar un sistema d'axiomes per al càlcul proposicional a partir de la implicació i la negació, que abasti el càlcul proposicional clàssic,

1 *Ibid.*, 162-63.

intrínsecament definit i sense necessitat d'introduir com a idea primitiva la noció d'*implicació formal* -o, el que és el mateix, les nocions de *funció proposicional* i *tot*- com havia fet a *Principles*. Els axiomes considerats per Russell a "The Theory of Implication" són els següents (amb la notació peaniana i la numeració emprada en aquest article):

$\ast 2.5$ $\vdash \cdot p \supset p$ (Identitat)

$\ast 2.6$ $\vdash : p \cdot\!\supset \cdot q \supset p$ (Simplificació)

$\ast 2.7$ $\vdash : \cdot p \supset q \cdot\!\supset : q \supset r \cdot\!\supset \cdot p \supset r$ (Sil·logisme)

$\ast 2.8$ $\vdash : \cdot p \cdot\!\supset \cdot q \supset r : \supset : q \cdot\!\supset \cdot p \supset r$ (Commutativitat)

$\ast 2.9$ $\vdash \cdot \sim (\backsim p) \supset p$ (Negació)

$\ast 2.91$ $\vdash : p \supset \backsim p \cdot\!\supset \cdot \backsim p$ (Reducció a l'absurd)

$\ast 2.92$ $\vdash : p \supset \backsim q \cdot\!\supset \cdot q \supset \backsim p$ (Transposició).

A aquests axiomes, cal afegir-hi les dues regles següents: *modus ponens* i *substitució*. Russell enuncia la regla de *modus ponens* ($\ast 2.1$) de forma anàloga a com ho havia fet a *Principles*. Pel que fa a la regla de *substitució*, Russell enuncia en realitat dues regles, la última de les quals és suficient per al càlcul exposat i és equivalent a la regla de substitució moderna. Russell l'enuncia en els termes següents:

> $\ast 2.3$. Si una funció proposicional $\varphi(y)$ és vertadera per qualssevol valors de y, llavors $\varphi(\psi(z))$ és vertadera per qualsevol valor de z.[1]

D'acord amb Russell, l'ús d'aquesta regla de substitució s'indicarà per $\varphi(y)\dfrac{\psi(z)}{y}$, la qual cosa significarà que y és substituïda en $\varphi(y)$ per $\psi(z)$. Així, per exemple, $\ast 2.5\dfrac{p \supset q}{p}$ donarà com a resultat $p \supset q \cdot \supset \cdot p \supset q$. Finalment, Russell analitza a "The Theory of Implication" la possibilitat d'un càlcul proposicional ampliat com el de *Principles*, si bé per abandonar-lo definitivament. Com ja sabem, per al desenvolupament d'aquest càlcul cal introduir un nou indefinible, la noció de *tot*, això és, el quantificador universal, mentre que la negació pot ser definida en termes anàlegs com ho havia estat a *Principles*. Per aquest càlcul proposicional ampliat, Russell introdueix les següent regles:

1 *Ibid.*, 165.

$*7.1 \quad \vdash: (x) \cdot \varphi(x) \cdot\supset \cdot \varphi(y)$ ("Allò que és vertader de tots és vertader de qualsevol")

$*7.11$ Allò que és vertader de qualsevol és vertader de tots

$*7.12 \quad \vdash: \cdot (x) \cdot p \supset \varphi(x) \cdot\supset: p \cdot\supset \cdot (x) \cdot \varphi(x)$ ("Si és veritat, per tots els valors de x, que p implica $\varphi(x)$, llavors p implica que $\varphi(x)$ és vertadera per tots els valors de x").

La primera és una regla d'eliminació del quantificador universal, mentre que la segona és una regla d'introducció d'aquest quantificador. Finalment, la tercera és una regla de transport o desplaçament del quantificador universals. Segons Russell, la segona regla no pot ser enunciada formalment. De fet, es tracta de la regla de *generalització universal*, que a *Principia Mathematica* esdevé la proposició primitiva $*10 \cdot 11$. Si $\vdash \phi y$, llavors $\vdash (x) \cdot \phi x$ (*Cf. infra*, Apèndix). Tal com hem pogut comprovar, doncs, Russell ha estat capaç de formular finalment amb una notable precisió i rigor, totes les regles necessàries per desenvolupament del càlcul proposicional ampliat exposat a *Principles* i en el mateix article "The Theory of Implication".

3. El càlcul de classes

A *Principles* Russell entén el càlcul de classes com una extensió del càlcul proposicional. Per això, les nocions i proposicions primitives d'aquell inclouen les d'aquest. Les nocions primitives específiques del càlcul de classes són tres: la relació de *pertinença* d'un individu a una classe i les nocions de *funció proposicional* i *tal que*. El mèrit de la introducció en lògica de la relació de pertinença d'un individu a una classe -simbolitzada per "ε"- i de la seva distinció respecte de la relació d'inclusió entre classes "-$\subset$"- correspon a G. Peano. Aquestes contribucions de Peano són remarcables no només, com assenyala Russell, per la importància dels seus desenvolupaments tècnics, sinó també perquè permet introduir la consideració dels individus en el discurs científic.[1] La distinció fonamental a nivell formal entre la inclusió i la pertinença és que la primera és transitiva i la segona no: Sòcrates és un home i els homes són una classe, però Sòcrates no és una classe. És important destacar, a més, que la relació de pertinença es dóna entre un individu i una classe i no entre un individu

1 *Cf. Russell 1903*, § 21, 19.

i un *concepte de classe* o *predicat*. En efecte, segons Russell, “la classe ha de distingir-se del concepte de classe o predicat a partir del qual es defineix: així, els homes són una classe, mentre que *home* és un concepte de classe. La relació ε s’ha d’entendre que té lloc entre Sòcrates i els homes considerats col·lectivament, no entre Sòcrates i *home*”.[1] En qualsevol cas, la distinció entre classe i concepte de classe suposa la *teoria de la denotació* que explicarem en la secció 5, per la qual cosa en posposarem el seu estudi fins aleshores. El segon indefinible del càlcul de classes es la noció de *funció proposicional*. Segons Russell, “encara que en el càlcul proposicional hi figuren funcions proposicionals, cada una d’elles es defineix en aparèixer-hi, de manera que no es requereix la noció general [*de funció proposicional*]. Per contra, en el càlcul de classes és necessari introduir explícitament la noció general”.[2] En la secció anterior ja hem vist que, en efecte, els antecedents i conseqüents dels axiomes del càlcul proposicional de *Principles* són funcions proposicionals. Ara bé, les úniques definicions que trobem en l’exposició del càlcul proposicional són les de la conjunció, negació i conjunció. Sembla evident, doncs, que quan Russell afirma que totes les funcions proposicionals estan definides, està pensant en una noció més restringida de funció proposicional que la que s’esmenta explícitament en el càlcul proposicional i que identifica les funcions proposicionals amb les anomenades *funcions fonamentals de proposicions* a *Principia Mathematica*, això és, les constants o connectives lògiques. Ara bé, ¿fa això innecessària la introducció de la noció de funció proposicional com a noció primitiva? Evidentment, no. Car els axiomes i les definicions del càlcul proposicional s’expressen com implicacions formals i la noció d’implicació formal suposa, com ja hem explicat en la secció anterior, les nocions de *tot* i *funció proposicional*. En particular, el logicisme de Russell requereix definir la negació a partir de la implicació i sense apel·lar a cap constant extra-lògica -a la manera de Wajsberg-, per la qual cosa es fa necessari apel·lar a la noció d’implicació formal. Encara que hom no pot definir la noció de *funció proposicional* -car Russell la considera com un dels *indefinibles* de la matemàtica pura-, la explica de la següent manera: “ϕx és una funció proposicional si, per a tot valor de x, ϕx és una proposició determinada quan x és donada. Així, “x és un home” és una funció proposicional”.[3] Una funció proposicional conté, doncs, dos elements, una forma fixa i constant -la funció pròpiament dita- i un terme variable -l’argument de la funció. De fet, la noció de funció proposicional suposa l’anàlisi lingüística de la proposició en subjecte i asserció. Russell

---

1 *Ibid.*, § 21, 19.
2 *Ibid.*, § 22, 19.
3 *Ibid.*, § 22, 19.

rebutja, com ja havia fet Frege, l'anàlisi de la proposició en subjecte i predicat, perquè aquesta anàlisi té el defecte d'ometre el verb.[1] En canvi, assenyala Russell, "tota proposició podria dividir-se [...] en un terme (el subjecte) i quelcom que es diu sobre el subjecte, la qual cosa anomenaré l'asserció [*assertion*]. Així, "Sòcrates és un home" podria dividir-se en *Sòcrates* i *és un home*. El verb, que és la marca distintiva de les proposicions, roman en l'asserció".[2] Ara bé, en una proposició qualsevol com, per exemple, l'anterior hom pot substituir Sòcrates per Plató o el nombre 2, obtenint així les proposicions "Plató és un home" o "El nombre 2 és un home". Així, assenyala Russell, "obtenim successives proposicions coincidents en tot excepte en el terme variable. Posant x per al terme variable, "x és un home" expressa el tipus de totes aquestes proposicions".[3] Finalment, el tercer indefinible és la noció de *tal que*, la qual permet, junt amb la noció de funció proposicional, introduir la noció de classe. En efecte, segons Russell, "els valors de x que fan una funció proposicional ϕx vertadera són com els arrels d'una equació -de fet, el darrer és un cas particular del primer- i podríem considerar llavors tots els valors de x *tals que* ϕx és vertadera. En general, aquests valors formen una *classe* i, en realitat, una classe podria definir-se com tots els termes que satisfan alguna funció proposicional".[4] La noció de *tal que* té, doncs, un clar import semàntic, car representa la noció de *satisfacció* d'una funció proposicional.[5] En altres paraules, "quan considerem els xs tals que ϕx, on ϕx és una funció proposicional, estem introduint una noció de la qual en el càlcul de proposicions només se'n fa un ús molt misteriós, això és, la noció de veritat. Estem considerant, entre totes les proposicions del tipus ϕx, aquelles que són vertaderes: els valors corresponents de x donen la classe definida per la funció ϕx".[6] En definitiva, a diferència de Peano, que havia introduït la noció de *classe* com a segon indefinible, Russell introdueix les nocions de *funció proposicional* i *tal que* com a indefinibles i a partir d'elles defineix la noció de classe. L'avantatge d'aquesta manera de procedir rau, segons Russell, en què permet introduir fàcilment la classe buida com la classe

---

1 Tal com assenyala Russell: "És veritat que, a vegades, es fa una concessió de gràcia parlant-se vagament de la còpula, però el verb mereix molta més atenció que la que així se li presta" (*Ibid.*, § 43, 39).

2 *Ibid.*, § 43, 39.

3 *Ibid.*, § 22, 20. Aquesta manera de caracteritzar les funcions proposicionals, segons la qual aquestes s'obtindrien a partir de les proposicions, juga un paper essencial a la teoria substitucional de 1906 (*Cf. infra*, § 10).

4 *Ibid.*, § 23, 20. Hi ha, tanmateix, funcions proposicionals -les anomenades *formes quadràtiques*- que, en derivar-ne una classe, donen lloc a contradiccions, per la qual cosa caldrà imposar algunes limitacions a aquest procediment (*Cf. infra*, § 7).

5 *Ibid.*, § 80, 83.

6 *Ibid.*, § 84, 88.

engendrada per una funció proposicional que és falsa per a tot valor de x. Per contra, en considerar-se la noció de classe com a primitiva i explicar-se aquesta com un terme respecte al qual algun altre terme estaria en la relació de pertinença, s'impossibilitaria la definició de la classe buida, car aquesta es caracteritza precisament pel fet que no hi pertany cap element.

En relació a les tres nocions primitives estudiades fins ara, el càlcul de classes requereix dues proposicions primitives i una definició, a saber:

> A1. Si x pertany a la classe de termes que satisfan una funció proposicional ϕx, llavors ϕx és vertadera.
>
> A2. Si ϕx i ψx són proposicions equivalents per a tots els valors de x, llavors la classe dels xs tals que ϕx és vertadera és idèntica a la classe dels xs tals que ψx és vertadera.
>
> D1. x és idèntic a y si y pertany a cada classe a la qual x pertany, en altres paraules, si "x és un u" implica "y és un u" per a tots els valors de u.[1]

Els axiomes anteriors esdevenen a *Principia Mathematica* els teoremes següents:

$$*20.3 \quad \vdash : x \,\varepsilon\, \hat{z}(\psi z) \cdot \equiv \cdot \psi z$$
$$*20.3 \quad \vdash :\cdot \psi x \cdot \equiv_x \cdot \chi x :\supset \cdot \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z),$$

mentre que la definició D1 esdevé el teorema:

$$*20.35 \qquad \vdash \cdot x = y \cdot \equiv : x \,\varepsilon\, \alpha \cdot \equiv_\alpha \cdot y \,\varepsilon\, \alpha.$$

Els axiomes A1 i A2 determinen la naturalesa extensional del càlcul de classes. El primer axioma estableix, en efecte, l'equivalència entre la satisfacció d'una funció proposicional amb un determinat argument i la pertinença d'aquest element a la classe determinada per la funció proposicional en qüestió. Aquest axioma permet, doncs, passar de la comprehensió d'un concepte de classe o predicat a la classe pròpiament dita -la classe plural, que en diu Russell. D'aquesta manera hom pot introduir la noció d'infinit en matemàtiques, car una classe infinita només pot introduir-se per mitjà d'una funció proposicional que determini precisament una classe d'aquesta mena, això és, com els xs *tals*

1 *Ibid.*, § 24, 20. De fet, pot considerar-se que cada axioma expressa una equivalència i és així com nosaltres els entendrem.

que ψx, on els xs que satisfan aquesta funció proposicional constitueixen una classe infinita. Per la seva banda, el segon axioma permet passar de l'equivalència de dues funcions proposicionals a la identitat de les classes determinades respectivament per elles. Així, d'acord amb aquest axioma, dues funcions proposicionals ψx i χx distintes però formalment equivalents o coextensives -és a dir, tals que ψx i χx són ambdues vertaderes o falses per a qualsevol valor de x- com, per exemple, "x és un home" i "x és un bípede sense plomes", determinen dues classes idèntiques. Segons Russell, la importància d'aquest axioma quedarà ben palesa en plantejar-nos la següent qüestió: "Considerem, per exemple, el problema de quantes combinacions poden formar-se a partir d'un conjunt donat de termes presos un nombre qualsevol de vegades o, el que és el mateix, quantes classes estan contingudes en una mateixa classe. Si classes distintes poguessin tenir la mateixa extensió, aquest problema esdevindria absolutament indeterminat".[1] Aquest axioma és, doncs, necessari per demostrar el teorema de Cantor sobre el conjunt de les parts d'un conjunt i, en definitiva, pel tractament matemàtic del càlcul de classes. És tracta evidentment de l'axioma V dels *Grundgesetze der Artihmetik* de Frege, és a dir, del principi d'*abstracció* o *comprehensió* (*Cf. supra*, cap. V, § 8). Per últim, cal esmentar que D1 defineix la relació d'identitat entre individus, que s'ha de distingir de la relació d'identitat entre classes, definida de la següent manera:

> D2. a és igual a b, si "x és un a" és equivalent a "x és un b", per a tots els valors de x.[2]

Ambdues són relacions d'equivalència i la importància de la primera rau, entre d'altres coses, en què donat un terme x, permet definir la classe que el conté només a ell com a terme -això és, el seu *singletó*- com la classe els termes de la qual són *idèntics* a x. La necessitat de la distinció entre un element i el seu singletó fou descoberta per Peano i resulta, segons Russell, de consideracions estrictament formals -més endavant tornarem sobre aquest punt.

1 *Ibid.*, § 24, 20-21.
2 *Ibid.*, § 24, 21.

4. El càlcul de relacions

El càlcul de relacions requereix, segons Russell, sis proposicions primitives. La primera enuncia que *xRy* és una *proposició* per a tots els valors de *x* i *y*, la qual s'expressa a *Principia* a través del següent teorema:

$$*21.33 \qquad \vdash : xRy \cdot \equiv_{x,y} \cdot \varphi(x,y).$$

Aquest primer axioma afirma, doncs, que tota relació *R* és equivalent a una funció proposicional amb dues variables. D'aquí que, segons Russell, tota relació *R* determini dues classes: la classe dels termes que tenen la relació *R* amb algun altre terme o classe dels *referents* respecte a *R*, i la classe dels termes respecte als quals algun terme té la relació *R* o classe dels *correlats*".[1] Es tracta dels dos teoremes següents de *Principia*:

$$*32.13 \qquad \vdash \cdot \overrightarrow{R}' y = \hat{x}(xRy),$$
$$*32.131 \qquad \vdash \cdot \overleftarrow{R}' x = \hat{y}(xRy).$$

És evident, doncs, que la idea de relació, tal com és entesa per Russell, suposa la idea de *sentit* o *ordre* de la relació, que permet distingir les relacions de les funcions proposicionals de dues variables i de la qual en parlarem tot seguit. De forma anàloga al que s'esdevenia en el càlcul de classes respecte de les funcions proposicionals, en el càlcul de relacions, dues relacions *R* i *S* poden ser *iguals* o *equivalents extensionalment* -és a dir, determinar la mateixa classe de parelles- i, en canvi, no ser *idèntiques* intensionalment - és a dir, no ser la mateixa relació. D'acord amb Russell, dues relacions *R* i *S* són equivalents si, i només si, *xRy* implica i és implicat per *xSy* per a tots els valors de *x* i *y*. Aquesta proposició és, doncs, equivalent a l'axioma 2 del càlcul de classes però, a diferència d'aquest, no és una proposició primitiva. Segons Russell, en efecte, pot demostrar-se a partir de l'axioma 2 que acabem d'esmentar i la definició del producte o suma lògica de la classe de relacions equivalents a *R* i *S* i, de fet, aquesta proposició és el teorema de *Principia Mathematica*:

---

1 *Ibid.*, § 28, 24.

$$*21.43 \qquad \vdash: \cdot R = S \cdot \equiv : xRy \cdot \equiv_{x,y} \cdot xSy),$$

on $R = \hat{x}\hat{y}(xRy)$ i $S = \hat{x}\hat{y}(xSy)$. Però les indicacions donades a *Principles* per a la seva demostració semblen contenir un cercle viciós, car no podem considerar la classe de les relacions equivalents a R i S quan el que es vol demostrar precisament és la proposició en què s'estableixen les condicions necessàries i suficients per considerar una relació com a equivalent -no havent-hi, com s'esdevé en aquest cas, cap definició prèvia d'equivalència entre dues relacions. En qualsevol cas, és important destacar que aquesta proposició dóna preeminència al punt de vista extensional del càlcul de relacions, posant en qüestió el suposat punt de vista intensional sobre el qual descansaria aquest càlcul a *Principles* -a *Principia* s'abandonarà definitivament aquest últim punt de vista en favor d'un punt de vista purament extensional. El segon axioma de *Principles* afirma que "tota relació té una conversa, és a dir, que donada una relació R qualsevol, existeix una relació R' tal que xRy és equivalent a $yR'x$ per a tots els valors de x i y".[1] Aquest axioma és el teorema:

$$*31.13 \qquad \vdash \cdot E!\ Cnv'P$$

de *Principia Mathematica*. Aquest axioma és força evident, car del fet que un objecte a estigui en una relació R respecte d'un altre objecte b sembla seguir-se'n immediatament el fet que b estigui en una relació R' -normalment distinta de R- respecte a a, de manera que es té generalment que (en notació moderna):

$$\forall x \forall y (xRy \leftrightarrow yR'x)$$

Seguint Schröder, Russell denotarà la conversa de R per $\breve{R}$ i definirà llavors les relacions *simètriques* com aquelles relacions les converses de les quals són idèntiques a elles mateixes -en cas contrari, s'anomenaran *asimètriques*. El tercer axioma del càlcul de relacions i, segons Russell, el més important, afirma que entre dos termes qualssevol existeix una relació que no té pas lloc entre dos altres termes.[2] Segons Russell:

> Aquesta [proposició] és anàloga al principi [del càlcul de classes] segons el qual un terme qualsevol és l'únic membre d'alguna classe, però mentre que aquest

[1] *Ibid.*, § 28, 25.
[2] *Ibid.*, § 28, 25.

principi pot ser demostrat degut a la caracterització extensional de les classes, aquell és, fins allà on puc esbrinar, indemostrable. En aquest punt, la caracterització extensional té un clar avantatge [...] [En canvi] quan les relacions es consideren intensionalment, podria dubtar-se fins i tot, si el principi anterior és vertader de debò.[1]

A *Principia*, en efecte, on s'adopta el punt de vista extensional tant en el càlcul de classes com en el de relacions, ambdós principis es demostren respectivament a partir de:

$$*51.15 \qquad \vdash: y\ \varepsilon\ \overrightarrow{I'}x \cdot \equiv \cdot y = x$$
$$*55.13 \qquad \vdash: z(x \downarrow y)w \cdot \equiv \cdot z = x \cdot w = y,$$

on $\overrightarrow{I'}x$ denota la classe unitària de x, *i.e.* $\overrightarrow{I'}x = \hat{y}(y = x)$. En canvi, des del punt de vista intensional adoptat a *Principles*, el tercer axioma no només no pot ser demostrat sinó que, fins i tot, és lluny de ser evident. Tanmateix, continua Russell:

Hom admetrà generalment que, respecte a dos termes qualssevol, alguna funció proposicional és vertadera que no és vertadera d'un parell donat de termes diferents [...] Així, el principi anterior podria ser reemplaçat pel següent, que és equivalent a ell: Si xRy implica $x'Ry'$, qualsevol que sigui R, mentre que R sigui una relació, llavors x i x', y i y' són respectivament idèntics. Però aquest principi introdueix una dificultat lògica de la qual fins ara n'hem estat exempts, a saber, una variable amb un camp restringit.[2]

Hom podria, en efecte, substituir l'axioma anterior per la fórmula següent (en notació moderna)

$$\forall R(xRy \rightarrow x'Ry') \rightarrow x = x' \wedge y = y',$$

que és equivalent, pel contrarecíproc, a l'axioma 3. Però xRy -o $x'Ry'$- només té sentit, això és, només és una proposició, si R és una relació, per la qual cosa el sentit de la proposició anterior depèn del fet que R sigui una variable restringida. Així, doncs, aquesta formulació de l'axioma 3 ens aboca, si hom conserva la caracterització intensional de les relacions a

1 *Ibid.*, § 28, 25.
2 *Ibid.*, § 28, 25.

introduir variables restringides, contràriament a l'esperit logicista manifest a *Principles*. Els tres axiomes restants estipulen: (*i*) que la negació d'una relació és una relació. A *Principia* tenim el teorema següent:

$$*23.38 \qquad \vdash . \dot{-} R \; \varepsilon \; \mathrm{Rel};$$

(*ii*) que el producte lògic d'una classe de relacions és una relació, la qual cosa es demostra a *Principia* a partir de les definicions del producte lògic i de relació, això és:

$$41.01 \qquad \dot{p}'\lambda = \hat{x}\hat{y}(R \; \varepsilon \; \lambda \, . \supset_R . \, xRy) \qquad \mathrm{Df}$$

$$21.03 \qquad Rel = \hat{R}\{(\exists \phi) \cdot R = \hat{x}\hat{y}\phi!(x,y)\}, \qquad \mathrm{Df}$$

on λ és una classe de relacions; (*iii*) que el producte relatiu de dues relacions és una relació,[1] la qual cosa es demostra també a *Principia* a partir de 21.03 i la definició següent de producte relatiu:

$$34.01 \qquad R/S = \hat{x}\hat{z}\{(\exists y) \cdot xRy \cdot ySz\} \qquad \mathrm{Df}$$

Malgrat que, en diversos indrets, Russell considera la noció de relació com una de les nocions primitives de la matemàtica pura, en l'exposició del càlcul de relacions pròpiament dit i en el capítol dedicat específicament a les relacions (capítol IX) no en fa cap referència en aquest sentit. En aquest capítol, en canvi, Russell considera com a primitiva la noció de *sentit* o *ordre*:

> Una relació entre dos termes és un concepte que figura en una proposició en la qual hi ha dos termes que no figuren com a conceptes, i en la qual l'intercanvi de dos termes dóna una proposició diferent. Aquest últim tret es requereix per distingir una proposició relacional d'una del tipus "*a* i *b* són dos", que és idèntica a "*b* i *a* són dos" [...] És a dir, és característic d'una relació de dos termes que procedeixi, per dir-ho així, *d*'un terme *a* l'altre. Això és el que podria anomenar-se el *sentit* d'una

[1] *Ibid.*, § 29, 25.

relació i és, com veurem més endavant, la font de l'ordre i les sèries [...] El sentit d'una relació és una noció fonamental, que no és susceptible de definició.[1]

Així doncs, la noció de *sentit* o *ordre* és el que permet distingir les relacions de les funcions proposicionals de dues variables i, conseqüentment, el que permet definir-les a partir d'aquestes últimes. Ja hem vist, en efecte, que Russell introduïa mitjançant l'axioma 1 les relacions com a funcions proposicionals amb dues variables i, a partir d'aquí, afirmava que tota relació R determina dues classes: la classe dels *referents* i la dels *correlats* respecte a R. Ara bé, és evident, que la consideració d'aquestes classes només té sentit si considerem que la idea de *relació* suposa, a més de la idea de *funció proposicional*, la idea d'*ordre* en el sentit abans esmentat. En efecte, una funció proposicional $\varphi(x, y)$ qualsevol és sempre idèntica a $\varphi(y, x)$ en el sentit que, en assignar valors a x i y, ambdues funcions proposicionals determinen sempre la mateixa proposició. Per contra, les relacions $R(x, y)$ i $R(y, x)$ determinen sempre proposicions distintes, fins i tot quan R és *simètrica*, això és, quan $R(x, y)$ i $R(y, x)$ són *equivalents* per a tots els valors de x i y, la qual cosa mostra que la noció de *sentit* o *ordre* és estrictament *intensional*.[2]

Remarquem finalment que la discussió anterior permet entendre perfectament les raons de la preferència de Russell a *Principles*, si més no a nivell teòric, per una consideració *intensional* de les relacions enfront d'una consideració *extensional* de les mateixes -la preferència pel punt de vista extensional seria, segons Russell, un altre defecte fonamental de la lògica de Peirce i Schröder.[3] Segons Russell, en efecte:

> Existeix una temptació a considerar una relació com definible en extensió com una classe de parelles. Això té l'avantatge formal que evita la necessitat de la proposició primitiva que afirma que tota parella té una relació que no es compleix entre cap altre parell de termes. Però és necessari donar sentit a la parella, distingir el

---

[1] *Ibid.*, § 94, 95-96.

[2] És important tenir en compte això, perquè el fet que la *conversa* d'una relació simètrica R sigui ella mateixa, podria dur-nos a pensar que la idea d'ordre és irrellevant en aquest cas, és a dir, que donats a i b, aRb i bRa determinen la mateixa proposició. Però, assenyala Russell, "fins i tot quan aRb implica i és implicat per bRa, ha de mantenir-se estrictament que aquestes proposicions són distintes". (*Ibid.*, § 94, 96).

[3] Segons Russell, en efecte, aquest autors "consideren una relació essencialment com una classe de còpules [...] Aquest punt de vista es deriva, jo crec, probablement de forma inconscient, d'un error filosòfic: ha estat sempre habitual suposar que les proposicions relacionals són menys fonamentals que les proposicions de classe (o proposicions de subjecte i predicat, amb les quals les proposicions de classe es confonen habitualment), i això ha dut a voler tractar les relacions com un tipus de classes" (*Ibid.*, § 27, 24).

referent del correlat: així una parella esdevé essencialment distinta d'una classe de dos termes i s'ha d'introduir ella mateixa com a idea primitiva [...] Sembla, doncs, més correcte considerar les relacions des d'un punt de vista intensional, i identificar-les més aviat amb els conceptes de classe que no amb les classes.[1]

En altres paraules, la definició extensional de les relacions com una partició del producte cartesià de dues classes -que poden ser la mateixa- suposa introduir la noció de parell ordenat com a idea primitiva. Però, segons assenyala Russell a *Principles*, per introduir aquesta noció i distingir-la d'una classe de dos termes és necessari apel·lar a la idea de sentit o ordre, la qual només podria derivar-se d'un enunciat relacional.[2] En definitiva, segons Russell, el punt de vista extensional sembla dur-nos a un cercle viciós. S'ha de dir, amb tot, que aquesta conclusió és més que discutible, car el punt de vista extensional és perfectament assumible, definint simplement la noció de parell ordenat a la manera de Kuratowski i, el mateix Russell optarà en certa mesura per aquesta via a *Principia*, on distingeix entre la *parella cardinal* ($\overrightarrow{I'} x \cup \overrightarrow{I'} y$) i la *parella ordinal* ($\overrightarrow{I'} x \uparrow \overrightarrow{I'} y$), essent l'ordre una característica exclusiva de la segona.[3] En qualsevol cas, el mateix Russell reconeix ja a *Principles* la preeminència del punt de vista extensional pel que fa al desenvolupament formal, no només del càlcul de classes, sinó també del càlcul de relacions, en afirmar que:

A través de les matemàtiques hi ha la mateixa i prou curiosa relació dels punts de vista intensional i extensional: els símbols altres que els termes variables (*i.e.* els conceptes de classe i les relacions variables) representen intensions, mentre que els objectes actuals amb els quals es tracta són sempre extensions: Així, en el càlcul de relacions són les parelles que són rellevants, però el simbolisme s'ocupa d'elles per mitjà de relacions. Això és semblant precisament a l'estat de coses explicat en relació a les classes.[4]

1 *Ibid.*, § 98, 99.

2 En efecte, segons Russell, "l'afirmació que *a* és el referent i *b* el correlat suposa ja una proposició purament relacional en la qual *a* i *b* són termes, encara que la relació afirmada és només la relació general del referent al correlat" (*Ibid.*, § 98, 99).

3 *Cf. Russell 1910*, ∗54 i ∗55.

4 *Russell 1903*, § 98, 99.

5. La teoria de la denotació

Una vegada finalitzat l'estudi de la lògica de *Principles* i dels seus indefinibles, en aquesta secció estudiarem una relació lògica que, tal com veurem de seguida, és d'una importància cabdal en la reducció de les matemàtiques a la lògica i que Russell fins i tot considera en alguna ocasió com un indefinible més, a saber, la relació de *denotació*. La teoria de la denotació de *Principles* es basa en dos grans principis: (*a*) "Tota paraula que figuri en un enunciat ha de tenir algun significat [*meaning*]" i (*b*) "Una proposició [...] no conté paraules: conté les entitats indicades per les paraules"[1] que, seguint Vuillemin, podríem anomenar respectivament el principi del *paral·lelisme lògico-gramatical* i el principi del *realisme*.[2] Les *paraules* o *mots* són, doncs, els constituents essencials d'un enunciat i poden ser de tres tipus fonamentals: *substantius*, *adjectius* i *verbs*.[3] Per la seva banda, les *entitats* o, millor dit, els *termes*, que es defineixen com "qualsevol cosa que pugui ser un objecte del pensament o pugui figurar en qualsevol proposició vertadera o falsa o pugui ser comptada com a *una*",[4] es divideixen en *coses*, *conceptes* -que poden ser alhora *predicats* o *conceptes classificatoris* [*class-concepts*]- i *relacions*. Els termes són, en definitiva, els *constituents* de les proposicions i la distinció entre *coses* i *conceptes* rau precisament en el fet que les primeres només poden figurar com a subjectes en les proposicions, mentre que els segons poden figurar indistintament com a subjectes o com a predicats. En efecte, assenyala Russell, "tot terme és un subjecte lògic: és, per exemple, el subjecte de la proposició que ell mateix és un".[5] Aquesta tesi és molt important perquè, com explicarem més endavant, està íntimament relacionada amb la concepció universalista de la lògica i genera immediatament la

---

1 *Ibid.*, § 46, 42 i § 51, 47 respectivament.

2 *Vuillemin 1968*, § 23, 165-67. Vegeu també els capítols IX i VI d'aquesta obra, on es duu a terme respectivament una anàlisi acurada de cada un del principis anteriors. Cal assenyalar, no obstant, que Vuillemin no parla específicament d'un principi del realisme sinó de diverses tesis o principis del realisme russellià, les quals suposarien el principi anterior.

3 Cal tenir en compte que aquests noms no s'empren amb el seu *significat gramatical* habitual sinó amb un *significat lògic*, això és, amb un significat que apunta més aviat a la funció lògica dels *termes* designats per ells en les *proposicions*. Així, per exemple, els *noms propis* cauen de banda dels *substantius* perquè, tal com s'explicarà tot seguit, les *coses* només poden ser pròpiament el subjecte en una proposició, mentre que els *noms generals* cauen de banda dels *adjectius* perquè, tal com veurem, els *predicats* o *conceptes classificatoris* poden ser indistintament el subjecte o el predicat d'una proposició.

4 *Russell 1903*, § 47, 43.

5 *Ibid.*, § 47, 44.

contradicció. Com hem dit abans, les *coses*, *conceptes* i *relacions* són indicats respectivament pels *noms propis*, *adjectius* i *verbs*. Tenim així la taula següent:

expressió	nom propi	adjectiu	verb
significat	cosa	predicat o concepte	relació

D'aquí, sembla que s'hauria de deduir immediatament la taula següent:

expressió	enunciat
significat	proposició

Però, com explicarem més endavant, Russell es negarà sempre a considerar les proposicions com el significat dels enunciats. En qualsevol cas, respecte als dos principis esmentats abans, cal que ens preguntem: (*a*) ¿de quina mena és la relació que s'estableix entre una expressió i el seu significat [*meaning*]? i (*b*) ¿quin és l'*estatus* ontològic de les proposicions i els seus constituents? Russell empra diversos verbs per expressar la mateixa relació: "*to mean*", "*to indicate*", "*to mention*", "*to stand for*", "*to express*" i, fins i tot, "*to denote*". Es tracta, en definitiva, de la relació que s'estableix entre un símbol lingüístic i allò designat per ell. Aquesta és la relació a la qual fan referència tant el *principi lògico-gramatical* com les taules anteriors. Ara bé, entesa en aquest sentit, la relació de significació és de tipus *psicològic*, no *lògic*. El següent text de Russell fa ben palès aquest punt de vista:

> Tenir significat, em sembla, és una noció composta confusament d'elements lògics i psicològics. Les paraules tenen totes un significat [*meaning*], en el simple sentit que són símbols que representen [*stand for*] alguna altra cosa que ells mateixos. Però una proposició, excepte quan s'esdevingui que sigui lingüística, no conté ella mateixa paraules: conté les entitats indicades [*indicated*] per les paraules. Així, el significat, en el sentit en què les paraules tenen significat, és irrellevant per la lògica.[1]

Així doncs, les proposicions lingüístiques -els enunciats- contenen paraules, però les proposicions pròpiament dites contenen les entitats *indicades* per les paraules. Per a Russell,

[1] *Ibid.*, § 51, 47.

en efecte, les proposicions són entitats complexes extramentals i objectives, això és, “independents de tota menta cognoscent”,[1] i és d’aquestes entitats que s’ocupa la lògica. Evidentment, podria resultar inversemblant que entitats concretes i existents puguin formar part d’entitats abstractes i “no existents” com les proposicions,[2] però, en qualsevol cas, aquesta és la tesi de Russell i és perfectament coherent amb l’ontologia de *Principles*. En aquesta obra, en efecte, Russell distingeix entre *ésser* i *existència* en els següents termes:

> *Ésser* [*Being*] és allò que pertany a qualsevol terme, a qualsevol objecte possible del pensament -breument, a cada cosa que pugui ocórrer en qualsevol proposició, vertadera o falsa- i a totes aquestes proposicions [...] *Existència* [*Existence*], al contrari, és la prerrogativa només d’alguns éssers.[3]

Així doncs, les proposicions i els termes tenen *ésser*, encara que tant les proposicions -i, en general, totes les entitats abstractes de la lògica i les matemàtiques com ara les funcions proposicionals, els nombres, etc- com alguns termes -com, per exemple, la Quimera o Apol·lo- no tinguin *existència*. Veiem així que la categoria ontològica fonamental a *Principles* és la d’*ésser* i que la distinció entre entitats concretes -existents- i abstractes -no existents- no és essencial. D’aquí que Russell no vegi cap problema en afirmar que en les proposicions puguin ocórrer objectes concretes i existents -com, per exemple, Sòcrates o el Mont Blanc. En la correspondència entre Frege i Russell de 1904 trobem reflectida a través d’un famós exemple la postura d’ambdós autors sobre aquest tema. Tal com assenyala gràficament Frege “el Mont Blanc amb les seves geleres no és ell mateix una part component del pensament [Gedanke] que el Mont Blanc té més de 4.000 metres d’altura”. A la qual cosa el respon Russell irònicament que “el Mont Blanc, tot i les seves geleres, és una part component d’allò que s’enuncia realment [actually] a l’enunciat [Satz] “El Mont Blanc té més de 4.000 metres d’alçària”. No afirmem el pensament [Gedanke], car aquest és un assumpte privat, psicològic: afirmem l’objecte del pensament i aquest és, al meu parer, un cert complex (un *enunciat objectiu* [*objectiver Satz*], podríem dir), en el qual el mateix Mont Blanc n’és una part component”.[4]

La discussió anterior manifesta ja l’actitud marcadament realista de Russell en el terreny de la lògica -i, per extensió, de les matemàtiques-, de la qual ens farem ressò al final

---

1 *Ibid.*, xviii.
2 *Ibid.*, xviii.
3 *Ibid.*, § 427, 449.
4 *Frege 1976*, 250-51.

de la nostra exposició. Aquesta s'ocupa, en efecte, de les proposicions, que s'entenen com quelcom molt proper als *fets* i, per això, Russell podrà dir alguns anys més tard que "la lògica s'ocupa del món real tan fidelment com la zoologia, encara que ho faci dels seus trets més abstractes i generals".[1] També és per aquest motiu que Russell refusarà sempre considerar les proposicions com els *significats* dels enunciats -encara que parli sovint dels seus constituents com allò significat pels constituents corresponents dels enunciats- i afirmarà, en definitiva, que la relació de significar és irrellevant per a la lògica. Hi ha tanmateix un altra sentit de la paraula *significar* que no només és rellevant, sinó que és fonamental en Lògica. A aquest sentit lògic de *significar* Russell l'anomenarà *denotar* [*to denote*] i a la relació corresponent l'anomenarà *denotació* [*denoting*]. Ara bé, aquesta ja no serà com la *significació* una relació de tipus psicològic entre els símbols lingüístics i allò que aquests representen, sinó que serà "una relació lògica entre alguns conceptes i alguns termes, en virtut de la qual aquests conceptes denoten inherentment i lògicament aquests termes".[2] És, doncs, una relació entre entitats o termes de diferents tipus: els conceptes denotatius i les coses denotades, mercès a la qual les proposicions que contenen aquests conceptes fan referència ja no als conceptes mateixos, sinó al terme o termes que denota aquest concepte. Segons Russell, en efecte:

> Un concepte denota quan, si figura en una proposició, la proposició no és sobre el concepte, sinó sobre un terme connectat en una certa forma peculiar amb el concepte. Si jo dic "em vaig trobar un home", la proposició no és sobre "un home": aquest és un concepte que no passeja pels carrers, sinó que viu en el limbe misteriós dels llibres de lògica. El que em vaig trobar era una cosa, no un concepte, un home real amb un sastre i un compte bancari o una taverna i una dona borratxa. Anàlogament, la proposició "qualsevol nombre finit és senar o parell" és òbviament vertadera; però el *concepte* "qualsevol nombre finit" no és senar ni parell. Només els nombres particular ho són, parells o senars.[3]

1 *Russell 1919*, 169.

2 *Russell 1903*, § 56, 53.

3 *Ibid.*, § 56, 53. Certament, com assenyala Russell més endavant, "és possible considerar i fer proposicions sobre els conceptes mateixos, però aquestes no són les proposicions naturals que fem en emprar els conceptes. "Qualsevol nombre és senar o parell" és una proposició perfectament natural, mentre que "*Qualsevol nombre* és una conjunció variable" és una proposició que només es fa en una discussió lògica" (*Ibid.*, § 65, 64). Dit d'una altra manera, podem considerar un ús no denotatiu dels conceptes, però aquest no és en cap cas el seu ús habitual. Notem, per cert, que aquesta distinció entre un ús denotatiu i no denotatiu dels conceptes, com les distincions entre proposició *considerada* i *afirmada* o *implies* i *therefore*, apunta a la necessitat de distingir entre *ús* i *esment*, entre *llenguatge* i *metallenguatge*, única manera d'evitar les dificultats constants a les quals Russell es veu conduït a *Principles*.

Notem, en efecte, que les proposicions *expressades* per enunciats que contenen *descripcions* -definides o indefinides- contenen els conceptes expressats per aquestes descripcions, però no el terme o termes al quals aquestes fan referència i que constitueixen el subjecte *real* de la proposició -això és, el terme respecte al qual afirmem o neguem el predicat, en el cas concret de les proposicions del tipus subjecte-predicat com les esmentades en el text anterior. Així, l'objectiu de la introducció de la relació de *denotació* és fornir-nos aquest terme o termes, els quals no podem abastar només amb la relació de *significació* [*meaning*]. Les descripcions són anomenades per Russell *frases* o *expressions denotatives* [*denoting phrases*], expressions constituïdes per una de les sis paraules següents: *tots*, *cada*, *qualsevol*, *un*, *algun* i *el*,[1] -és a dir, el que en termes de la lògica tradicional s'anomena un *indicador de quantitat*- i un *nom general*, ja sigui simple o compost, singular o plural -és a dir, un *terme general*, en la terminologia escolàstica. El nom general *expressa* un *concepte classificatori* [*class-concept*], això és, el concepte distintiu dels elements d'una classe, i la *expressió denotativa expressa* el *concepte denotatiu*, relacionat amb el concepte classificatori de la manera *indicada* per l'indicador de quantitat corresponent. Així, per exemple, relacionat amb el concepte classificatori (expressat pel nom general) "home", tenim els conceptes denotatius (expressats per les frases denotatives) següents: *tots els homes* [*all men*], *cada home* [*every man*], *qualsevol home* [*any man*], *un home* [*a man*], *l'home* [*the man*]. Podem concloure, doncs, que si bé totes les paraules tenen significat [*meaning*], les expressions denotatives tenen, a més, *denotació* -encara que *indirectament*, això és, a través dels conceptes denotatius.[2]

Naturalment, hom podria objectar, que la llista anterior d'expressions denotatives no és exhaustiva, car no hi figuren expressions com ara "la majoria dels homes" que semblen certament denotatives, però hom també podria objectar, en sentit contrari, que la llista anterior és sobreabundant, car no sembla que hi hagi cap diferència a nivell denotatiu entre expressions com, per exemple, "tots els homes" i "cada home" o "algun home" i "un home".

[1] *Ibid.*, § 58, 56.

[2] Cal advertir que l'exposició sumària de la teoria de la denotació de *Principles* que acabem de realitzar és més fidel a l'*esperit* que no pas a la *lletra* de l'exposició del propi Russell. Això es degut fonamentalment a que en l'exposició de Russell es confonen el nivell *enunciatiu* -lingüístic- i el *proposicional* -lògic-, confusió habitual, d'altra banda, al llarg de *Principles*. Així, per exemple, Russell utilitza indistintament les expressions *concepte denotatiu* i *expressió denotativa* per referir-se als conceptes denotatius, i considera que aquests estan formats per un *concepte classificatori* i una de les sis *paraules* ja esmentades. Tanmateix, la mateixa terminologia de *Principles* i la correspondència que, a través de la relació de *meaning*- s'estableix entre enunciats i proposicions, suggereixen les distincions i precisions terminològiques que hem adoptat a la nostra exposició -de fet, Russell exposarà a *On Denoting* la teoria de la denotació de *Principles* en termes molt semblants als emprats aquí.

Respecte a la primera objecció cal assenyalar que Russell no pretén evidentment fer una llista exhaustiva de totes les expressions del mateix tipus, sinó que es limita a les expressions característiques de les matemàtiques, que serien precisament les contingudes en la llista anterior.[1] En aquest sentit, Russell assenyala que "el tema és de vital importància per a la filosofia de les matemàtiques, donat que tant la naturalesa del nombre com de la variable depenen d'aquest punt".[2] En efecte, com ja hem vist en la primera secció, les proposicions de les matemàtiques es caracteritzen per la seva generalitat, la qual s'expressa mitjançant la utilització de variables. D'aquí que, segons afirma el mateix Russell, la variable sigui, des d'un punt de vista formal, "*la* noció característica de les matemàtiques" i l'explicació de la seva naturalesa sigui "essencial a qualsevol teoria de les matemàtiques".[3] D'altra banda, com ja hem explicat, la noció de variable que requereix la reducció de les matemàtiques a la lògica és la de *variable universal*, no restringida, *i.e.* la d'una variable el rang de valors de la qual és qualsevol terme. Doncs bé, en el capítol VIII de *Principles*, titulat precisament "La variable", Russell en proposa la següent definició:

"*x*, la variable, és allò que es denotat per *qualsevol terme*".[4]

Així doncs, la definició de variable suposa la noció de *qualsevol* i la relació de *denotació*. La importància de "trobar una filosofia correcta de *qualsevol*" en l'*iter* intel·lectual del nostre autor queda ben palesa en el prefaci de *Principles*, en el qual Russell afirma que, arran de les dificultats suscitades per la filosofia de la Dinàmica "vaig ser dut a una revisió dels principis de la Geometria, d'aquí a la filosofia del continu i l'infinit i, d'aquí, en vistes a descobrir el significat de la paraula *qualsevol*, a la Lògica Simbòlica".[5] D'una altra banda, com ja hem vist, Russell defineix a *Principles* el nombre com una classe de classes *semblants* i, com veurem en el següent paràgraf, les classes mateixes -si més no les infinites, i les diferents classes de nombres són totes elles infinites- com allò denotat pels conceptes denotatius amb *tot*. Així, la definició de nombre pressuposa també la relació de *denotació* i la noció de *tot*. En definitiva, tant la definició de variable com la de nombre suposen la teoria de

1 *Ibid.*, § 58, 55. Però caldria preguntar-se llavors perquè en la llista no hi figuren les expressions del tipus "cap home". ¿Quina seria, per cert, la denotació d'aquestes expressions denotatives?

2 *Ibid.*, § 58, 55.

3 *Ibid.*, § 87, 90.

4 *Ibid.*, § 86, 89.

5 *Ibid.*, xvii.

la denotació, la qual cosa mostra el paper fonamental que juga aquesta teoria en la reducció de la matemàtica a la lògica. Ara bé, tal com veurem al final d'aquest paràgraf i en el següent, Russell posa sovint èmfasi en què la importància de la teoria de la denotació rau sobretot en què ens permet tractar amb l'infinit, això és, amb qualsevol mena de classe infinita -i no només amb la dels nombres.

La resposta a la segona objecció relativa a la llista d'expressions denotatives esmentada abans no és, en canvi, tan fàcil, car per respondre-la Russell haurà de justificar d'alguna manera la necessitat de distingir entre les sis expressions denotatives. I per això Russell es preguntarà prèviament: "¿hi ha una manera de denotar sis classes diferents d'objectes, o són les maneres de denotar diferents? I, en aquest últim cas ¿és l'objecte denotat el mateix en tots els sis casos, o difereix tant l'objecte com també la manera de denotar-lo?"[1] En qualsevol cas, ¿quina és la naturalesa de l'objecte o objectes denotats? Per respondre aquestes preguntes, Russell analitzarà les cinc primeres expressions denotatives, dispensant a les expressions amb l'article definit -les *descripcions definides*- un tractament diferenciat, degut a les limitacions inherents al seu ús denotatiu i a la seva importància en matemàtiques. En definitiva, Russell respon a les preguntes formulades més amunt, assenyalant (*i*) que "tota la diferència [respecte a les expressions denotatives] rau en els objectes i que la denotació és la mateixa en tots els casos" i (*ii*) cada expressió denotativa denota un objecte diferent "caracteritzat com un conjunt de termes combinats d'una certa manera [...] i és a aquest objecte tan paradoxal que les proposicions, en les quals el concepte corresponent és emprat com a denotant, fan referència".[2] Així, per exemple, si $a_1, a_2, ..., a_n$ són termes sobre els quals cau el concepte classificatori *a*, llavors *tots els a*s denotarà $a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n$, això és, el que Russell anomena la *conjunció numèrica* dels termes que cauen sota *a* i que, tal com veurem en la secció següent, identificarà amb la *classe plural*. Amb tot, cal remarcar que els arguments utilitzats per Russell per demostrar les dues tesis anteriors són força enrevessats i, fins i tot, contradictoris. Així Russell afirma, per exemple, que la distinció entre *tots els a*s i *cada a* rau en què el primer concepte denota *col·lectivament* tots els termes que cauen sota *a*, mentre que el segon els denota *distributivament*. Sembla evident, doncs, que aquesta distinció es basa en què aquests conceptes denotatius denoten de manera diferent una mateixa combinació de termes, en contra de les dues tesis anteriors. I el mateix es pot dir, en major o menor grau, de la distinció entre *un a* i *algun a*. Prou significativament, totes dues distincions anteriors seran abandonades definitivament per Russell a partir de l'article *On Denoting*

1 *Ibid.*, § 59, 56.
2 *Ibid.*, § 62, 61-62.

(*1905*$_b$), considerant-se ambdues parelles d'expressions denotatives com equivalents. Destaquem també que, en les expressions del tipus *qualsevol a*, l'èmfasi es posa erròniament en la variabilitat de l'objecte denotat. Així, assenyala Russell, "*qualsevol a* denota només un *a*, però és completament irrellevant quin denota i el que és digui serà veritat igualment sigui quin sigui aquest. Més encara, *qualsevol a* denota un *a* variable".[1] Això està en consonància evidentment amb la concepció russelliana de la variable com una *entitat extralingüística* i, en particular, amb la seva definició com allò denotat per *qualsevol terme*. Però una variable no és, com pretén Russell, qualsevol terme, sinó, en tot cas, un signe lingüístic equivalent a l'expressió *qualsevol terme*, el qual denota *ambiguament* -té com a rang de valors- tots els termes. En altres paraules, Russell confon en realitat la variable amb una *quantitat variable*. En definitiva, l'anàlisi russelliana de les expressions denotatives té una certa ressemblança amb el de la lògica medieval car, d'una banda, la referència al distint mode de denotació per distingir les expressions amb *tots* i *cada*, suposa un ressorgiment evident de la teoria de la *suppositio* i, d'una altra banda, la diferenciació entre les diferents expressions denotatives a partir de la diferència entre els objectes denotats recorda excessivament l'anàlisi medieval de les proposicions a partir del seu *import* -existencial, universal, etc- i queda molt lluny encara de l'anàlisi fregeana de les expressions que contenen indicadors de quantitat la qual està basada en la moderna noció d'*abast* o *domini* dels quantificadors (*Cf. supra*, cap. V, § 2).

Pel que fa a les expressions denotatives amb "*el*", és a dir, les *descripcions definides*, Russell assenyala primer de tot que "la paraula *el*, en singular, s'empra correctament només en relació a un concepte classificatori del qual n'hi ha només una instància. Parlem llavors d*el* rei, *el* primer ministre i així successivament (s'entén *en el moment present*); i, en aquests casos, tenim un mètode per denotar un terme singular i definit per mitjà d'un concepte, el qual no ens és donat per cap de les altres cinc paraules".[2] Així doncs, l'*ús correcte* o *denotatiu* de les descripcions definides està condicionat per l'*existència* i *unicitat* de l'objecte denotat. Ara bé, donat l'horitzó ontològic il·limitat de *Principles* sembla que la primera condició s'hagi de complir sempre. En efecte, si, com assenyala Russell, "un moment, un nombre, una classe, una relació, una quimera, o qualsevol altra cosa que hom pugui esmentar, és un terme",[3] ¿Què ens impedeix afirmar llavors que una descripció definida com ara "l'actual rei de França" té denotació? D'altra banda, Russell no aclareix en cap moment què s'esdevé quan una descripció definida no s'empra correctament, això és, quan el concepte

1 *Ibid.*, § 60, 58-59.
2 *Ibid.*, § 63, 62.
3 *Ibid.*, § 47, 43.

denotatiu corresponent no denota cap terme o en denota més d'un. En qualsevol cas, segons Russell, la importància de les descripcions definides rau en què "és mercès a aquesta noció que les matemàtiques poden donar definicions de termes que no són conceptes [...] Cada terme és la única instància d'*algun* concepte classificatori i així, cada terme és en teoria susceptible de definició, excepte en el cas en què haguem adoptat un sistema en el qual el terme esmentat sigui un dels indefinibles".[1] De fet, assenyalarà Russell més endavant, si bé és cert que la majoria de les definicions de les matemàtiques fan referència a una classe d'entitats o termes, aquesta classe és en realitat *l'*única que satisfà unes certes condicions i és, doncs, l'única instància d'un concepte classificatori determinat. Assenyalem finalment que, segons Russell, la teoria de la denotació de les descripcions definides permet solucionar el problema relatiu al contingut informatiu dels enunciats que afirmen una identitat. Aquest problema fou posat per primera vegada per Frege, i Russell el planteja i resol en termes molt similars. En efecte, segons Russell, si considerem la relació d'identitat com una relació que s'estableix entre un terme i ell mateix, llavors l'afirmació de la identitat de dos termes seria sempre una tautologia. Ara bé, l'afirmació de la identitat de dos termes té plenament sentit quan la relació s'estableix entre un terme i el concepte expressat per una descripció definida o entre els conceptes denotatius expressats per dues descripcions definides, en el supòsit que s'emprin correctament:

> Si diem "Eduard VII és el rei" afirmem una identitat; i la raó per la qual aquesta afirmació no és banal és que, en un cas, el terme real figura [en la proposició], mentre que en l'altra un concepte denotatiu pren el seu lloc [...] Sovint dos conceptes denotatius figuren en una proposició, i el terme mateix no és esmentat, com en la proposició "el present Papa és el darrer supervivent de la seva generació".[2]

De l'anterior remarca sembla desprendre's, d'altra banda, que quan un concepte denotatiu expressat per una descripció definida ocupa el lloc d'un terme en una proposició, el terme en qüestió no forma part ell mateix de la proposició -a no ser que, com en el primer exemple del text anterior, el terme ja figuri en ella. Ara bé, ¿és extensible això a la resta de conceptes denotatius?, és a dir, ¿podem considerar generalment que les denotacions dels conceptes denotatius no formen part de les proposicions en què aquests figuren? Per respondre aquesta pregunta recordem primer de tot que els termes -els constituents de les

[1] *Ibid.*, § 63, 62-63.
[2] *Ibid.*, § 64, 64.

proposicions- han de poder ser comptats com a *un*, per la qual cosa semblaria que les combinacions de termes denotades per *tots*, *cada*, *algun* i *un* no formarien part de les proposicions, com tampoc en formaria part, d'acord amb el text anterior, el terme denotat per l'expressió denotativa *el*. Ara bé, el mateix Russell sembla negar explícitament aquesta possibilitat quan assenyala que "els termes inclouen tot allò que pot figurar en una proposició, amb l'excepció possible dels tipus de complexos de termes denotats per *qualsevol* i les paraules afins".[1] Així doncs, tant les combinacions de termes denotades per *tots*, *cada*, *algun* i *un*, com el terme singular denotat per *el*, formarien part de les proposicions. D'acord també amb aquest punt de vista, Russell assenyala en un altre indret que:

> La proposició "qualsevol nombre té un successor" és composta d'un nombre finit de constituents: el nombre de conceptes que entren en ella pot ser enumerat i, a més d'aquests, hi ha un agregat infinit de termes denotats de la manera indicada per *qualsevol*, que compta com un constituent [més]. De fet, podria dir-se que el servei lògic prestat per la teoria de la denotació és que les proposicions de complexitat finita puguin ocupar-se de les classes infinites de termes i aquest objectiu l'acompleixen *tots*, *qualsevol* i *cada*, altrament tota proposició general referent a una classe infinita hauria de ser infinitament complexa.[2]

És evident, tanmateix, que aquest text planteja més interrogants que no en resol. ¿Com pot, en efecte, un agregat infinit de termes ser comptat com *un* constituent de la proposició? La resposta de Russell sembla ser que ho pot ser en tant que denotat per un concepte denotatiu amb *tots*, *qualsevol* o *cada*. Però llavors sembla que hauríem de concloure que tant els conceptes denotatius com les combinacions de termes denotades per ells formen part de la proposició. A més, tal com veurem en la propera secció, l'objecte denotat per les expressions amb *tot* -la *classe plural*- no pot ser comptat sempre com a *un*, la qual cosa afegeix al seu torn, un nou problema a la teoria de la denotació.

---

1 *Ibid.*, § 49, 46.
2 *Ibid.*, § 141, 145.

6. La gènesi de la noció de classe

En el capítol VI dels *Principles*, Russell exposa els trets essencials de la seva teoria de classes en el marc de la teoria de la denotació, exposada en el capítol anterior. Això el permetrà, com veurem de seguida, donar resposta a una sèrie de problemes referents a la naturalesa de les classes, a la classe buida i a les classes amb un sol element i infinites, entre d'altres. A la pregunta *¿què* és una classe? s'hi pot respondre, assenyala Russell, des de dos punts de vista: *extensional* i *intensional*. Des del primer punt de vista, tal com hem vist en el paràgraf anterior, "una classe és una conjunció numèrica de termes".[1] Des del segon punt de vista, "les classes han de ser considerades, en general, com a objectes denotats per conceptes".[2] Pel que fa al primer punt de vista, Russell observa que, relacionats amb un predicat -com, per exemple, *humà*-, trobem tota una sèrie de conceptes afins -com ara *home*, *homes* i la *humanitat*-, la denotació dels quals juga un paper clau en el que podríem anomenar la gènesi intensional de la noció de classe. Cal, doncs, que centrem la nostra atenció en aquests conceptes i estudiem les diferències que Russell introdueix entre ells a nivell denotatiu. Segons explica ell mateix:

> Ja havíem quedat en anomenar *home* [*man*] al concepte classificatori [class-concept], però *home*, en el seu ús habitual, no denota res. D'altra banda, *homes* [*men*] i *tots els homes* [*all men*] (que consideraré com a sinònims) denoten, i sostindré que el que denoten és la classe composta de tots els homes. Així, *home* és el concepte classificatori, *homes* (el concepte) és el concepte de la classe, i els homes (l'objecte denotat pel concepte *homes*) són la classe.[3]

Així doncs, els conceptes de classe, com ara *homes*, són equivalents als conceptes denotatius amb *tots*, com ara *tots els homes*, en el sentit que denoten la mateixa classe, la classe dels homes. La classe denotada per aquests conceptes és, d'altra banda, la *classe plural*: *class as many*, que Russell entén com una *conjunció numèrica* de termes, això és, com una *col·lecció* de termes connectats mitjançant la lletra "*i*" que resta definida tan bon punt s'han enumerat els seus termes. Però, segons Russell, també s'han de considerar com a conceptes de classe els conceptes com ara *la humanitat -the human race*. Aquests conceptes

[1] *Ibid.*, § 67, 67.
[2] *Ibid.*, § 66, 66.
[3] *Ibid.*, § 67, 67.

denoten, en efecte, la *classe una -class as one-*, això és, el *tot -whole-* compost pels membres d'una classe, que Russell identifica en l'apèndix A de *Principles* amb els cursos de valor fregeans.[1] Sens dubte, el concepte fonamental de classe a *Principles* és el de *classe plural*, això és, la classe en extensió i aquest és el sentit fonamental en què, segons Russell, cal interpretar les classes, tant si aquestes ens són donades ja com una conjunció numèrica de termes -això és, extensionalment- com si ens són donades mitjançant un concepte -això és, intensionalment.[2]

L'exposició sumària de les idees de Russell respecte la noció de classe planteja immediatament tota una sèrie d'interrogants referits fonamentalment a l'interès lògic de la distinció, d'una banda, entre *classe una* i *classe plural* i, d'una altra, entre la gènesi intensional i extensional de la noció de classe. Respecte a això últim, donada la primacia reconeguda al punt de vista extensional, hom podria preguntar-se certament si hom no pot prescindir del punt de vista intensional en la gènesi de la noció de classe. La resposta de Russell és negativa car, com veurem a continuació, no només les classes infinites, sinó també les classes amb un sol element i la classe buida no poden introduir-se si no és a través dels conceptes de classe. En primer lloc, en efecte, encara que *teòricament* totes les classes hagin d'interpretar-se extensionalment, *en la pràctica* la gènesi extensional de les classes és aplicable només al cas finit. En canvi, totes les classes -tant finites com infinites- poden obtenir-se com els objectes denotats pels conceptes de classe o les expressions denotatives amb *tots*. De fet, com ja havíem assenyalat en la secció anterior, l'objectiu fonamental de la teoria de la denotació és el de permetre introduir en el discurs lògic les classes infinites. Segons Russell, efectivament:

> Respecte a les classes infinites, com ara la classe dels nombres, cal observar que el concepte *tots els nombres*, encara que no sigui ell mateix infinitament complex, denota així i tot un objecte infinit complex. Aquest és el secret més íntim de

[1] *Cf. ibid.*, § 70, 68 , § 74, 76 i § 484, 511.

[2] Cal tenir en compte, en efecte, que la teoria de la denotació assegura en últim terme l'import extensional dels conceptes de classe. Cal recordar, en aquest sentit, que en la secció anterior havíem esmentat cinc tipus d'expressions denotatives, una de les quals eren les expressions amb *tot*, les quals són equivalents als conceptes de classe i denoten un tipus determinat de combinació de termes: la conjunció numèrica de termes. En altres paraules, encara que la classe sigui considerada intensionalment, la teoria de la denotació duu a identificar la classe amb la conjunció numèrica de termes. D'aquesta manera, Russell intenta conjugar a *Principles* els beneficis d'una perspectiva extensional i intensional en lògica. Cal remarcar, d'altra banda, que la definició extensional de les classes no està exempta de problemes. En efecte, el tipus de combinació expressada per la "*i*" -la *conjunció numèrica* o *addició d'individuals*- és irreductible a la *conjunció proposicional* o a qualsevol altra *indefinible* i sembla suposar, doncs, la introducció d'una nova *noció primitiva*.

> la nostra capacitat per ocupar-nos de l'infinit. Un concepte complex infinit, encara que pugui haver un concepte d'aquesta mena, no pot ser manipulat certament per la intel·ligència humana; però les col·leccions infinites, gràcies a la noció de denotació, poden ser manipulades sense introduir cap concepte d'infinita complexitat.[1]

Veiem, segonament, els problemes que es deriven, d'una banda, de la consideració de les classes amb un sol element i, d'una altra, de la interpretació extensional de les classes. Abans havíem dit que una classe s'ha d'interpretar extensionalment com una conjunció numèrica de termes, amb la qual cosa la noció de "*i*" semblaria essencial per a la definició de classe. Ara bé, assenyala Russell:

> La noció de *i* no entra en el significat d'una classe, car un terme simple és una classe, encara que no és una conjunció numèrica. Si *u* és un concepte classificatori i només una proposició de la forma "*x* és un *u*" és vertadera, llavors "tots els *u*s" és un concepte que denota un terme simple, i aquest terme és la classe de la qual "tots els *u*s" és un concepte. Així, el que sembla essencial a una classe no és la noció de *i*, sinó el ser denotada per algun concepte de classe.[2]

Això no vol dir, tanmateix, que els termes simples no hagin de ser *qua* classes interpretats extensionalment, car tota classe, insisteix Russell en un altre indret, s'ha d'interpretar en extensió, tant si és un terme simple com si és una conjunció numèrica de termes.[3] Un terme simple, en efecte, s'ha de considerar també com una *col·lecció* de termes, a saber, com una col·lecció d'*un* terme.[4] En realitat, el que vol destacar Russell és que un terme simple és una classe, la qual cosa suposa una excepció a la regla segons la qual una classe s'ha d'interpretar extensionalment com una conjunció numèrica de termes. D'aquesta manera, la noció de *i* deixa de ser fonamental en la gènesi de la noció de classe i esdevé fonamental el fet que la classe sigui denotada per un concepte. Ara bé, assenyala Russell, si un concepte com ara "tots els *u*s" denota un sol terme simple, llavors aquest terme haurà de constituir una classe i haurem de negar, doncs, la distinció entre el terme simple i la classe l'únic membre de la qual és aquest terme.[5] Aquesta distinció és prominent a Peano encara

---

1 *Ibid.*, § 72, 73.
2 *Ibid.*, § 71, 72.
3 *Ibid.*, § 79, 80.
4 *Ibid.*, § 71, 70-71.
5 *Ibid.*, § 126, 131.

que, continua Russell, se sustenta en una base falsa. Peano identifica, en efecte, la classe amb el predicat o el concepte classificatori, els quals seran sempre de naturalesa diferent als termes o terme al qual s'apliquin. Però Peano no pot distingir llavors entre els predicats o conceptes classificatoris amb la mateixa extensió -per exemple, *humà* o *home* i *bípede sense plomes*-, la qual cosa sembla ser raó suficient per rebutjar la seva identificació. Malgrat tot, la distinció peaniana entre un element i la classe li sembla a Russell necessària:

> Considerem, per exemple, la classe de nombres que, sumats a 3, donen 5. Aquesta és una classe que no conté altres termes que el nombre 2. Però podem dir que 2 és un membre d'aquesta classe, *i.e.* té a la classe aquella relació peculiar i indefinible que els termes tenen a les classes a les quals pertanyen. I això sembla indicar que la classe és diferent del terme.[1]

¿Com pot reconciliar-se, doncs, aquesta distinció amb la interpretació extensional de les classes? La resposta que dóna Russell és que "una classe ha de ser sempre un objecte d'un tipus lògic diferent que els seus membres i que, per tal d'evitar la proposició $x \in x$, aquesta doctrina s'ha d'estendre fins i tot a les classes amb un sol membre".[2]Ara bé, es pregunta Russell, si una classe difereix dels seus membres pel seu tipus lògic, no hauríem de prohibir llavors la identificació de la classe amb la conjunció numèrica de termes? Per respondre aquesta pregunta i salvar la distinció entre el terme i la classe amb sol terme, Russell apel·la en l'apèndix A als *Werthverläufe*, és a dir, als *cursos de valor* o *rangs* fregeans:

> Així, encara que identifiquem la classe amb la conjunció numèrica dels seus termes sempre que hi hagi més d'un terme, quan hi ha un sol terme hem d'acceptar els rangs de Frege com a un objecte distint del seu únic terme. I havent fet això, podríem evidentment admetre també un rang en el cas de les funcions proposicionals nul·les.[3]

Així doncs, els cursos de valors fregeans permeten a Russell donar raó de la distinció entre el terme i la classe que té com a únic element aquest terme i l'admissió de la classe buida, que constitueixen clares excepcions a la definició extensional de la classe com a

[1] *Ibid.*, § 125, 131.
[2] *Ibid.*, § 126, 131-32.
[3] *Ibid.*, § 491, 517.

conjunció numèrica de termes. La classe buida planteja, en efecte, problemes semblants als estudiats fins ara respecte de les classes amb un sol element:

> Com ja hem vist, tots els conceptes denotatius es deriven dels conceptes classificatoris; i *a* és un concepte classificatori quan "*x* és un *a*" és una funció proposicional. Els conceptes denotatius associats amb *a* no denotaran res quan i només quan "*x* és un *a*" sigui falsa per a tots els valors de *x* [...] i, en aquest cas, direm que *a* és un concepte classificatori buit i que "tots els *a*s" és un concepte buit d'una classe. Així, per a un sistema com el de Peano, en el qual el que s'anomenen classes són realment conceptes classificatoris, no sorgeixen necessàriament dificultats tècniques; però per nosaltres roman un problema lògic genuí.[1]

Hom podria intentar, continua Russell, introduir la classe buida substituint una classe qualsevol per la classe dels conceptes classificatoris que determinen aquesta classe. I, de fet, pot establir-se una correspondència biunívoca entre aquestes classes *simpliciter* i les classes de conceptes classificatoris *iguals*, correspondència que només es trenca en el cas dels conceptes classificatoris *buits*, als quals no els correspon evidentment cap classe buida. Aquest procediment pot servir, assegura Russell, per satisfer els requeriments del formalisme respecte a la classe buida.[2] En qualsevol cas, assenyala Russell en el cos de *Principles*, la classe buida és una ficció i només s'han d'admetre els conceptes classificatoris *buits* i els conceptes *buits* de classe. Aquesta classe només s'acceptarà a l'apèndix A a través de la introducció dels cursos de valors fregeans.

En resum: Segons Russell, totes les classes s'han d'interpretar extensionalment, encara que la gènesi extensional de classes sigui aplicable només al cas finit. Les classes infinites han de considerar-se, doncs, com denotades per conceptes, això és, intensionalment. A més, la interpretació extensional de les classes fa impossible l'admissió de la classe buida i la distinció del terme de la classe l'únic membre de la qual és aquest terme. No obstant això, el desenvolupament formal de la lògica fa necessàries l'admissió de la classe buida i la distinció esmentada. En el cas de la classe buida, aquest requeriment es pot satisfer, des d'un punt de vista estrictament formal, mitjançant la consideració de la classe de tots els conceptes classificatoris buits o funcions proposicionals nul·les. Això permetria introduir la classe buida en el discurs lògic, sense haver d'acceptar la seva existència. D'altra banda, la distinció del

1 *Ibid.*, § 73, 74.
2 *Ibid.*, § 73, 75-76 i § 486, 513.

terme i la classe amb un sol terme requereix l'acceptació com a classes dels cursos de valor fregeans i l'afirmació que el terme és sempre d'un tipus lògic diferent al de la classe. Finalment, la plena acceptació a l'apèndix A dels cursos de valor com a classes, possibilitarà també l'acceptació de l'existència de la classe buida, com a rang de les funcions proposicionals nul·les.

Un vegada explicada i resumida la interpretació russelliana a *Principles* del concepte de classe, cal que ens preguntem finalment sobre l'interès lògic de la distinció entre *classe una* i *classe plural*. Ja hem dit abans que el concepte fonamental de classe a *Principles* és el de classe plural i que aquestes classe s'han d'entendre fonamentalment com els objectes denotats pels conceptes de classe o els conceptes denotatius amb *tot*. D'altra banda, en el desenvolupament formal del càlcul de classes, Russell considerava la noció de classe com una noció derivada a partir de les nocions primitives de *funció proposicional* i *tal que*. Així, tal com hem vist en la secció 3, l'axioma A1 assegurava que, donada una funció proposicional ϕ qualsevol, els "xs tals que ϕx" constitueixen una classe, entesa de nou com "la classe genuïna, presa en extensió i plural".[1] Hom podria pensar, doncs, que la distinció entre classe plural i classe una és totalment irrellevant i estaria forçada simplement per la distinció a nivell gramatical entre les expressions denotatives plurals -per exemple, *els homes*- i singulars -per exemple, *la humanitat*. Res més lluny de la realitat car, com ha assenyalat P. de Rouilhan en el seu llibre *Russell et le cercle des paradoxes* (*1996*), aquesta distinció és fidel a la manera com havia quedat plantejat a partir de Cantor "el problema fonamental de la teoria de conjunts".[2] Cantor, en efecte, havia obert els seus "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" (*1895-97*) amb la següent definició:

> Per "conjunt" ["*Menge*"] entenem qualsevol reunió en un tot [*Zusammenfassung zu einem Ganzen*] M d'objectes m ben definits i completament distints de la nostra intuïció o del nostre pensament (els quals s'anomenaran els "elements" de M).[3]

Ara bé, es pregunta Russell, ¿constitueix tota reunió o *col·lecció* d'elements "ben definits" un conjunt, un *tot*?, és a dir, ¿defineix tota funció proposicional amb un argument no

[1] *Ibid.*, § 80, 82. L'analogia entre ambdós punts de vista és ben palesa si tenim en compte que, segons Russell, ""x és un u" és una funció proposicional quan i només quan, u és un concepte classificatori" (*Ibid.*, § 58, 56).

[2] *Rouilhan 1996*, 73-74.

[3] *Cantor 1966*, 282.

només una col·lecció de termes, una *classe plural*, sinó també un tot, una *classe una*? Com veurem en la secció següent, la resposta a aquests interrogants és negativa. L'antinòmia de classes mostra, en efecte, que a un tipus determinat de funcions proposicionals, les anomenades *formes quadràtiques*, els correspon una classe plural, però no una classe una. Aquesta seria precisament l'excepció que confirma la regla de *Principles* segons la qual "una col·lecció qualsevol, encara que com a tal sigui una classe plural, si està definida per una funció proposicional no quadràtica, constitueix un tot".[1] Així doncs, per a Russell no hi ha contradicció en el fet que, d'una banda, les classes s'hagin d'interpretar extensionalment com a *classes plurals* -excepte en el cas de la classe buida i les classes amb un sol element- i, d'una altra banda, aquestes classes hagin de constituir un *tot*, una *classe una*, per a poder ser considerades com a veritables classes. I, com ja hem dit abans, Russell identificarà en l'apèndix A -si bé amb certes reserves- la classe una amb els *rangs* o *cursos de valors* fregeans. Tanmateix, com veurem en la secció següent, el descobriment de l'antinòmia de classes i les diferents solucions esbossades per Russell a *Principles*, suposaran la renuncia total o parcial a la noció de classe una i, a la llarga, el duran al rebuig de les classes en general.

7. Les antinòmies: origen i primers esbossos de solució

En el capítol anterior ja hem exposat el famós paràgraf de la carta de Russell de 16 de Juny de 1902, en el qual aquest informa a Frege de la possibilitat de deduir una contradicció en el sistema lògic de *Grundgesetze* (*Cf. supra*, cap. V, § 11). Tal com remarcàvem allí, Russell exposa la seva paradoxa indistintament en termes de predicats -això és, intensionalment- i de classes -això és, extensionalment. Això no ens hauria d'estranyar donada, d'una banda, la relació íntima que hi ha a *Principles* entre els predicats i els conceptes de classe i, d'una altra, l'existència de l'axioma A2 de la teoria de classes de *Principles*, segons el qual tota funció proposicional determina una classe. Amb tot, en la correspondència amb Frege la versió preeminent és l'extensional i és lícit pensar que Russell es plantejà originàriament la paradoxa en aquests termes. De fet, en la mateixa carta, Russell expressa la contradicció esmentada en la notació de Peano de la següent manera:

---

[1] *Russell 1903*, § 136, 140.

$$w = \mathrm{cls} \cap x \ni (x \sim \varepsilon\, x) \cdot\!\supset\!:\, w\, \varepsilon\, w \cdot\!=\!\cdot w \sim \varepsilon\, w$$

això és, si w és la classe dels x tals que $x \notin x$, llavors $w \in w \leftrightarrow w \notin w$.[1] I, en la carta de 24 de Juny del mateix any, Russell confessa a Frege que:

> Vaig arribar a la contradicció de la següent manera. Cantor ha demostrat, com vostè sap, que no existeix el més gran cardinal. Aquesta demostració és la següent:
>
> $$R\, \varepsilon\, 1 \to 1 \cdot \breve{\varrho} \supset \mathrm{Cls}'\varrho \cdot w = \varrho \cap x \ni (x \sim \varepsilon\, \iota\, \breve{\varrho}x) \supset_R \cdot w \sim \varepsilon\, \varrho :\supset \cdot \mathrm{Nc}'\mathrm{Cls}'\varrho \succ \mathrm{Nc}'\varrho$$
>
> (això només és el més essencial de la demostració). Ara bé, hi ha conceptes l'extensió dels quals abasta totes les coses i han de tenir, doncs, el cardinal més gran. He intentat establir una relació bijectiva entre tots els objectes i totes les classes, però quan he aplicat la meva relació especial a la prova de Cantor, la classecls $\cap\, x \ni (x \sim \varepsilon\, x)$ ha restat fóra, encara que totes les classes havien estat ja enumerades.[2]

Cantor havia demostrat per primera vegada en l'article "Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten" (*1883*), que no existeix el més gran cardinal. Però en l'article "Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre" (*1891*), Cantor provà de nou aquest resultat mitjançant un nou i potent mètode: el procediment *diagonal*. Concretament, aquest article consta de tres parts essencials: (*a*) la demostració que existeixen potències (cardinals) més gran que la dels conjunts numerables, (*b*) la remarca que el mètode de prova emprat pot aplicar-se a qualsevol potència i (*c*) la demostració com a corol·lari que existeixen potències més grans que la del continu. El cas general és conegut precisament com teorema de Cantor i

---

1 *Frege 1976*, 212.

2 *Ibid.*, 216-217. Segons Russell, els signes emprats en la fórmula anterior estan explicats en l'article "The Logic of Relations" (*Russell 1901*), però en aquest article no trobem cap aclariment al respecte. Amb tot, tal com assenyalat els editors de *Wissenschaftlicher Briefwechsel* (*Frege 1976*), "d'acord amb la notació de *Peano* i la forma d'utilització de les lletres corresponents en l'article citat per ell i *Principles* (*op. cit.*), ϱ és el domini i $\breve{\varrho}$ el rang d'una relació bijectiva R, $\mathrm{Cls}'\varrho$ la classe potència de ϱ, $\mathrm{Nc}'\varrho$ el nombre cardinal (potència) de ϱ, el signe "$\subset$" entre signes de classe serà emprat, com a Peano, com el signe d'inclusió entre classes, *i.e.* com el signe "$\subseteq$" d'avui en dia. La fórmula diu llavors que la potència de la classe potència d'una classe ϱ és més gran que la potència de ϱ mateixa, perquè per cada relació R bijectiva de ϱ en una classe de classes de parts de ϱ (en particular, en la classe de *totes* les classes de parts de ϱ) la classe w de totes els elements de ϱ, que no són elements de la seva imatge per R, no apareixen com imatge de R [...] Si aquesta reconstrucció és encertada, llavors s'ha de llegir en la fórmula de Russell entre els dos condicionals "$w \sim \varepsilon\, \breve{\varrho}$" en comptes de "$w \sim \varepsilon\, \varrho$"" (*Frege 1976*, 216, n. 3). Caldria matisar que Russell demostra el teorema de Cantor a *Principles* § 346, 365, per al cas numerable, i a *Principles* §§ 346-47, 365-66, per al cas general. En aquest darrer cas, Russell ofereix tres proves diferents, essent la tercera la més coneguda i la que reprodueix la fórmula de la carta. Sobre l'origen cantorià de la paradoxa de Russell, vegeu també *Russell 1903*, § 100, 101 i § 344, 362.

diu que per qualsevol conjunt u, $u \prec \wp(u)$. La demostració d'aquest teorema, que Russell esquematitza en la fórmula de la carta de 24/6/1902 que hem citat fa un moment i reprèn en diversos indrets en termes molt semblants als emprats aquí, és prou coneguda:

(i) És clar, en primer lloc, que $u \precsim \wp(u)$, car l'aplicació que associa a cada element $x \in u$ el conjunt $\{x\} \in P(u)$ és injectiva.

(ii) Es tracta de demostrar llavors que $u \nsim \wp(u)$. Per això, es considera un conjunt qualsevol u^* de parts de u (*i.e.* $u^* \subseteq \wp(u)$ i es demostra que no hi pot haver una aplicació bijectiva de u a u^* -i, en particular de u a $\wp(u)$. Sigui, en efecte, f aquesta aplicació i sigui $w = \{x : x \in u \wedge x \notin fx\}$, aleshores w no és imatge per f de cap element de u. Car si per algun $x \in u$, $w = fx$ es tindria llavors

$$x \in w \leftrightarrow x \notin fx \leftrightarrow x \notin w$$

i, doncs, $x \in w$ i $x \notin w$, la qual cosa seria absurda. Hom conclou així que, per tot nombre cardinal κ, potència d'una classe u, existeix sempre un cardinal estrictament més gran, 2^κ, potència de $\wp(u)$ i, per tant, que no existeix el cardinal més gran.

Ara bé, assenyala Russell a *Principles*, hi ha classes, com ara la classe de tots els termes -entitats o objectes-, de les quals es raonable pensar que tenen el més gran cardinal. Així, continua Russell, "semblaria que la prova de Cantor hauria de contenir alguna hipòtesi que no estaria verificada en el cas d'aquestes classes. Però quan apliquem el raonament de la seva prova als casos en qüestió, ens trobem nosaltres mateixos enfrontats amb contradiccions precises".[1] Sigui u, en efecte, la classe de tots els objectes -aleshores $\wp(u)$ serà la classe de totes les classes-, sigui f l'aplicació de u en $\wp(u)$ definida per $fx = x$ si x és una classe i $fx = \{x\}$ altrament[2] i sigui, com abans, $w = \{x : x \in u \wedge x \notin fx\}$. Llavors:

$$w = \{x : \text{cls}(x) \wedge x \notin x\}$$

1 *Ibid.*, § 344, 362.

2 Aquesta és, d'acord amb el que s'especifica a *Principles* (*Russell 1903*, § 349, 367), la *relació especial* de la qual parla Russell en la carta de 24/6/1902.

(car, si x no és una classe, $x \in \{x\} = fx$ i, per tant, $x \notin w$). Però $w = fw$ i, per tant, $w \in w$ i $w \notin w$, *i.e.* "w és una classe contradictòria que és i no és al mateix temps membre de si mateixa".[1]

Hem vist, doncs, que l'aplicació del raonament de la prova de Cantor a la classe de tots els objectes mena a la classe de totes les classes que no són membres de si mateixes, a partir de la qual s'obté la contradicció. A partir d'aquesta contradicció se segueix, segons afirma Russell en la carta de 16/6/1902, que "no hi ha cap classe, com a tot, [constituïda] d'aquelles classes que, com a tots, no pertanyen a elles mateixes" i que, "sota determinades circumstàncies, un conjunt definible no constitueix un tot".[2] Ara bé, ¿quines són aquestes circumstàncies que duen a les *pseudoclasses* com ara w? En altres paraules, ¿Quines condicions lògiques ha de satisfer una funció proposicional per definir un *tot*? Per respondre aquesta pregunta, cal acudir a la carta de 24/6/1902, on Russell aclareix els seus dubtes sobre la variabilitat de les funcions expressats en la carta anterior:

> Soc de l'opinió que hom no pot variar en general els conceptes i que la contradicció només sorgeix si l'argument és ell mateix funció de la funció, *i.e.* si la funció i l'argument no poden variar independentment. En la funció $\varphi\{\grave{\varepsilon}\,\varphi(\varepsilon)\}$, φ és l'única variable i l'argument $\grave{\varepsilon}\,\varphi(\varepsilon)$ és ell mateix (d'acord amb la forma d'expressió habitual) una funció de φ.[3]

Aquest és, en efecte, el cas de les funcions com ara $x \in x$ o $x \notin x$. Per exemple, aquesta última funció, a través de la qual hem vist que Russell defineix a *Principles* la classe w és equivalent a "φ no pot ser afirmada de la classe de termes que satisfan φ" i, per tant, és de la forma $\neg\varphi(K_\varphi)$, on K_φ representa la classe de termes que satisfan φ. Aquestes funcions proposicionals, l'argument de les quals varia al mateix temps que la mateixa funció i que donen lloc a les classes contradictòries, s'anomenen a *Principles formes quadràtiques* i, a partir de l'article "On some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types" (*1905*$_c$), *funcions no predicatives.* Russell proposa a *Principles* dos mètodes per eliminar les contradiccions que suposen respectivament els primers esbossos de la *teoria zig-zag* i de la *teoria de tipus*. El primer és suggerit per l'anàlisi anterior i consisteix essencialment a exigir a les funcions que defineixen classes una simplicitat tal que impedeixi

---

1 *Ibid.*, § 349, 367.
2 *Frege 1976*, 211.
3 *Ibid.*, 215.

que l'argument variï al mateix temps que la funció i, per tant, a negar que a les *formes quadràtiques* els corresponguin classes veritables. Així, Russell afirma a *Principles* que "la contradicció s'evita pel reconeixement que la part funcional d'una funció proposicional no és una entitat independent"[1] -recordem que una *entitat independent* és el mateix que un *subjecte lògic* i, per tant, dir que les funcions proposicionals no poden ser entitats independents és el mateix que dir que no poden formar-se expressions del tipus $\neg\varphi(\varphi)$ que donen lloc a la contradicció. Aquestes *formes quadràtiques* definiran certament una *col·lecció* de termes -una *classe plural*-, però no un *tot* -una *classe una*. Consegüentment, afirma Russell a *Principles*, caldria renunciar al principi segons el qual "tota classe plural és al mateix temps una classe-una" i, per tant, al principi segons el qual "tota funció proposicional no nul·la defineix una classe i tota classe pot ser definida per una funció proposicional",[2] això és, a l'axioma A1 del càlcul de classes. Tanmateix, Russell no arribarà a desenvolupar aquest mètode a *Principles*, perquè negar que les funcions proposicionals puguin ser entitats independents suposa negar que hi hagi variables funcionals i, per tant, que es pugui quantificar respecte a elles. Però això, afirma Russell a *Principles*, és impossible, perquè "sempre que ocorre una classe variable o una relació variable, hem admès un funció proposicional variable, la qual és així essencial per les assercions sobre totes les classes o sobre totes les relacions".[3] A més, aquesta tesi va en contra de la concepció universal de la lògica, perquè una conseqüència d'aquest tesi és precisament que els conceptes -les funcions proposicionals- puguin ser subjectes lògics. Aquests són els motius pels quals Russell no negà a *Principles* la variabilitat de les funcions i s'inclina per la doctrina de tipus per a la solució de les paradoxes. El segon mètode suposa essencialment la teoria de tipus i la renuncia a les *classes unes*: Segons Russell, en efecte:

> Una classe una és un objecte del mateix *tipus* que els seus termes; *i.e.* tota funció proposicional $\phi(x)$ que és significant quan se substitueix x per un dels termes, també és significant quan se substitueix per la classe una. Però la classe una no existeix sempre, i la classe plural és d'un tipus diferent que els termes de la classe, fins i tot quan la classe té només un terme, *i.e.* hi ha funcions proposicionals $\phi(u)$ en les quals u podria ser la classe plural, que no tenen significat si substituïm u per un dels termes de la classe. I, per tant, "x és un dels xs" no és en absolut una proposició

1 *Russell 1903*, § 85, 88.
2 *Ibid.*, § 103, 103.
3 *Ibid.*, § 103, 104.

> si la relació en qüestió és la d'un terme a la classe plural; i aquesta és l'única relació de la qual una funció proposicional ens assegura sempre la seva presència [...] És la distinció dels tipus lògics que és la clau de tot el misteri.[1]

Així doncs, les funcions proposicionals del tipus $\phi(u)$, on u és una variable de classe, només son significatives si substituïm u per un objecte del mateix tipus que les classes. Però els individus i les classes unes són d'un tipus diferent del de les classes d'individus i, per tant, no poden ser substituïts "salva significationem" per u. Ara bé, això és el que s'esdevé amb les funcions com ara $x \in x$ o $x \notin x$ que donen origen a l'antinòmia. Aquestes funcions són, com ja sabem del tipus $\phi(K_\phi)$ on K_ϕ representa una classe una -car x és una classe i la relació $\in$ requereix que el referent sigui d'un tipus inferior al del correlat. Aquestes funcions són, doncs, *no significatives* [*meaningless*], car *si* ϕ és una funció els arguments de la qual son classes d'individus, llavors els seus arguments possibles han de ser del mateix tipus lògic que aquelles i no poden ser conseqüentment classes unes. Ara bé, és evident que per tal que aquesta solució suggerida per la teoria de tipus sigui vàlida, no n'hi ha prou a considerar als individus i les classes plurals com pertanyents a diferents tipus lògics, sinó que cal a més renunciar a les classes unes, almenys en el sentit que una funció proposicional determini generalment una classe una. Car les formes del tipus $\phi(K_\phi)$ son perfectament significatives, d'acord amb la teoria de tipus, si interpretem K_ϕ com una classe una i ϕ com una funció els arguments de la qual pertanyen al tipus dels individus i classes unes i, per tant, també seria significativa la funció proposicional $x \notin x$, a partir de la qual s'obté l'antinòmia. Cal, doncs, renunciar a considerar les classes unes com a les veritables classes però no, com suggereix Russell, perquè les formes quadràtiques determinin només una classe plural, sinó perquè aquesta és l'única manera d'evitar que aquestes funcions siguin significatives, tot respectant la jerarquia dels tipus de classes proposada a *Principles*.

Russell exposarà en detall la teoria de tipus en l'Apèndix B de *Principles*. Aquesta teoria es basa en dos postulats o punts:

> Tota funció proposicional $\phi(x)$ té, a més del seu rang de veritat, un rang de significació [*significance*], *i.e.* un rang en el qual x ha de caure si $\phi(x)$ és una proposició, ja sigui vertadera o falsa. Aquest és el primer punt de la teoria de la teoria de tipus. El segon punt és que els rangs de significació formen *tipus* [*types*], *i.e.* si x pertany al rang de significació de $\phi(x)$, llavors hi ha una classe d'objectes, el *tipus* de

[1] *Ibid.*, § 104, 104-105.

x, tots els quals han de pertànyer també al rang de significació de $\phi(x)$, independentment de com ϕ pugui ser variada.[1]

El segon postulat té com objectiu, doncs, establir una jerarquia de tipus, en la qual hom pugui classificar, a través dels seus valors possibles, les variables que figuren com arguments d'una funció proposicional. Russell estableix a *Principles* quatre jerarquies diferents de tipus, corresponents a les *classes*, les *relacions*, els *nombres* i les *proposicions*:

(*i*) *Els tipus de classes*

Els tipus inferior està constituït pels *termes* o *individus*, en els quals s'inclouen les *classes unes*. Vénen a continuació les classes d'individus -*i.e.* les classes plurals- com, per exemple, "Brown i Jones"; després les classes de classes d'individus com, per exemple, les associacions de clubs de futbol, etc. Russell reservarà el nom de *classe* a les classes d'individus i anomenarà *rang* a qualsevol tipus de classe.

(*ii*) *Els tipus de relacions*

Hi ha diferents sèries de tipus, segons que la relació considerada sigui binària, ternària, etc. Així, assenyala Russell, la primera sèrie "comença amb la parella ordenada. Un rang d'un tipus d'aquesta mena és el que la Lògica Simbòlica considera una relació: aquest és el punt de vista extensional de les relacions. Podríem formar llavors rangs de relacions, o relacions de relacions, o relacions de parelles (com, per exemple, la separació en Geometria projectiva), o relacions d'individus i parelles, etc, i, d'aquesta manera obtenim no merament una simple progressió, sinó una sèrie infinita de progressions".[2] I el mateix es pot dir naturalment de les sèries de tipus corresponents a les relacions ternàries i d'aritat més gran. Russell conjectura, donada la seva analogia amb la sèrie de racionals $1, 2, ..., n, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, \frac{2}{3}, ..., \frac{2}{5}, ..., \frac{2}{2n+1}, ...$ que el nombre total d'aquesta "immensa jerarquia de sèries" és $\aleph_0$. Remarquem, doncs, que la jerarquia de relacions ha estat bastida a partir del que hem anomenat punt de vista extensional de les relacions, la qual cosa confirma la preeminència d'aquest punt de vista pel que fa al desenvolupament formal enfront del punt de vista intensional (*Cf. supra*, § 4).

[1] *Ibid.*, § 497, 523.

[2] *Ibid.*, § 497, 524-25.

(*iii*) *Els tipus de nombres*

Recordem que Russell havia definit el nombre com "una classe de classes semblants", la qual cosa equival a dir, en termes de la teoria de tipus, que "cada nombre selecciona certs objectes de cada altre tipus de rang, a saber, aquells rangs que tenen el nombre de membres en qüestió".[1] Els nombres constitueixen, doncs, una jerarquia de tipus. Amb tot, la definició de nombre sembla suggerir que els nombres naturals es poden introduir a partir de la jerarquia de classes, per la qual cosa no caldria introduir específicament una jerarquia de tipus de nombres -aquest és el punt de vista adoptat per Russell en les diferents versions de la teoria de tipus que estudiarem més endavant.

(*iv*) *Els tipus de proposicions*

Les proposicions formen també un tipus específic perquè "només les proposicions poden significativament ser afirmades com a vertaderes o falses".[2] A partir d'elles s'aixeca llavors una jerarquia de tipus formada pels rangs o classes de proposicions, les classes de classes de proposicions, etc. Però aquesta jerarquia de tipus fa reaparèixer de nou la contradicció, que la teoria havia precisament d'eliminar. Russell explica com sorgeix aquesta contradicció en els termes següents:

> Sigui *m* una classe de proposicions, llavors la proposició "cada *m* és vertadera" podria ella mateixa ser o no un *m*. Però hi ha una relació injectiva d'aquesta proposició en *m*; car si *n* és diferent de *m*, "cada *n* és vertadera" no és la mateixa proposició que "cada *m* és vertadera". Considerem ara la classe sencera de proposicions de la forma "cada *m* és vertadera", les quals tinguin la propietat de no ser membres dels seus respectiu *m*s. Sigui *w* aquesta classe i sigui *p* la proposició "tot *w* és vertadera". Si *p* és un *w*, llavors ha de tenir la propietat que defineix *w*; però aquesta propietat exigeix que *p* no sigui un *w*. Per un altre costat, si *p* no és un *w*, llavors *p* té la propietat que defineix *w* i, per tant, és un *w*. Així, la contradicció sembla inevitable.[3]

---

1 *Ibid.*, § 498, 525.
2 *Ibid.*, § 498, 526.
3 *Ibid.*, § 500, 527.

Russell sembla haver arribat a aquesta paradoxa per un camí molt semblant al que l'havia conduït a la paradoxa relativa a la noció de classe i, aparentment, no és distingeix pas d'ella. Però, tal com veurem més endavant, aquesta paradoxa fa referència en realitat única i exclusivament a la noció de *proposició*. Russell suggereix a *Principles* com a solució a la paradoxa anterior la possibilitat que "les proposicions elles mateixes siguin de diversos tipus" tot i que considera aquesta idea "brutal i altament artificial".[1] Es tractaria, en definitiva, d'una *ramificació* dels tipus de proposicions, la qual adoptarà ja en la *teoria substitucional ramificada* de "Les paradoxes de la logique" (*1906*$_c$) i posteriorment en la *teoria de tipus ramificada* de l'article "Mathematical Logic as based on the Theory of Types" (*1908*) i de la Introducció a *Principia Mathematica* (*1910*). Estudiarem aquestes teories més endavant, però abans de fer això, convé que ens fem ressò de la *teoria de les descripcions* de 1905 perquè, tal com veurem en la secció següent, serà precisament aquesta teoria la que aportarà una primera llum sobre el difícil problema de les paradoxes.

8. *On Denoting* i la nova teoria de les descripcions

Tal com hem explicat anteriorment, l'interès de Russell a *Principles* pel problema de la denotació està íntimament lligat amb l'intent de reduir les matemàtiques a la lògica (*Cf. supra*, § 5). En aquest sentit, el descobriment de la Contradicció el va dur a replantejar-se alguns tòpics de la vella teoria de la denotació i, a la llarga, a substituir-la per una nova teoria, que exposarà en la seva forma definitiva en l'article "On Denoting" (*1905*$_b$). La teoria de la denotació de *Principles* representava, en efecte, l'aspecte filosòfic de la pràctica lògica de Russell, que en el període 1900-1902 es desenvolupa en el marc de les tècniques introduïdes per Peano. Així, per exemple, les frases denotatives amb "algun" i "el" s'expressen en el simbolisme de Peano a través de les proposicions obtingudes en prefixar els operadors $\exists$ i ι a l'abstractor de classes $\ni$, és a dir, a través de les expressions:

$$\exists x \ni \phi(x) \qquad \text{i} \qquad \iota x \ni \phi(x).$$

[1] *Ibid.*, § 500, 528.

Ara bé, l'ús de l'abstractor de classes havia estat posat en qüestió pel descobriment de la paradoxa de classes, per la qual cosa calia buscar nous mètodes per a l'expressió de la quantificació existencial i les descripcions definides que no suposessin la teoria de classes. Així, per exemple, en els manuscrits immediatament posteriors a *Principles* publicats recentment en el volum 4 de *The Collected Papers of Bertrand Russell* (*Russell 1994*), el nostre autor reemplaçarà les expressions del primer tipus per $(\exists x).\phi(x)$. En canvi, l'expressió adequada per les descripcions definides tardarà molt més en arribar, perquè en ella Russell voldrà expressar les condicions d'existència i unicitat de l'objecte denotat. Sigui com sigui, és evident que l'antinòmia de classes posava en qüestió l'import extensional dels conceptes denotatius i atacava, doncs, la mateixa línia de flotació de la teoria de la denotació de *Principles*. Calia, doncs, no només una nova notació lògica per expressar els enunciats en els quals figuren frases denotatives, sinó també una nova interpretació d'aquests enunciats que fes possible renunciar als conceptes denotatius i a la relació de denotació -de fet, tal com veurem, es tracta de les dues cares d'una mateixa moneda. Això és el que Russell durà a terme de forma definitiva a "On Denoting". És evident, d'una altra banda, que Russell esperava que el qüestionament de la vella teoria de la denotació aportés -directament o indirecta- alguna llum sobre com solucionar l'antinòmia de classes. Així, per exemple, en una carta de 1906 a Philip Jourdain, Russell assenyala que:

> A l'abril de 1904 vaig començar a treballar de nou en la Contradicció i vaig continuar amb això, amb poques interrupcions, fins al gener de 1905. En tot aquest temps, vaig estar molt ocupat amb la qüestió de la denotació, la qual pensava que era probablement rellevant, com realment es va esdevenir.[1]

De fet, un cop enllestit el cos principal de *Principles*, que Russell envià a l'impremta el 2 de Maig de 1902, Russell es posà a estudiar l'obra de Frege, que discuteix, com ja sabem, en l'Apèndix A de *Principles*, enviat a l'impremta el 15 de Novembre del mateix any. Entre el maig de 1903 i l'abril de 1904, Russell escriu diversos manuscrits dedicats quasi exclusivament al problema de la denotació. Tal com veurem en les pàgines següents, aquests manuscrits fan palesa, d'una banda, la influència de Frege, que es manifesta a través de l'adopció en els primers manuscrits de la distinció entre *significat* i *denotació* i el seu progressiu abandonament en els manuscrits posteriors i, d'una altra, la importància que

[1] *Grattan-Guinness 1977*, 79.

Russell atorgava als problemes referents a la denotació en relació a la tasca de fonamentació de les matemàtiques i, en particular, a la solució de la contradicció.

El primer d'aquesta sèrie de manuscrits es titula 'On the Meaning and Denotation of Phrases' (*1903$_a$*) i en ell Russell exposa una teoria molt similar a la de l'Apèndix A de *Principles*: Els *noms propis* tenen *denotació* [*denotation*] però no *significat* [*meaning*]; en canvi, els *verbs* i *adjectius* tenen *significat* però no *denotació*. Els *noms generals* -ex: *taula*- es consideren *adjectius* però els *noms abstractes* -ex: *negror* [*blackness*]- es consideren *noms propis*, els quals *denoten* -però no *signifiquen*- els objectes que els *adjectius* que constitueixen la seva arrel -a l'exemple anterior, *negre*- *signifiquen*, però no *denoten*. Finalment, les anomenades a *Principles expressions* o *frases denotatives* -ex: *la taula*- tenen alhora *significat* i *denotació*. No només les expressions denotatives tenen significat i denotació, també els enunciats -com, per exemple, "la taula és negra" tenen les dues propietats alhora. Hom té llavors el següent *principi de composicionalitat*:

> Quan una paraula o frase que significa i denota alhora figura en una frase, el seu *significat* és un constituent del *significat* de la frase sencera i la seva *denotació* de la *denotació* o del significat, segons la circumstància. Així, *taula* és part del significat de "la taula és negra", i la taula en qüestió és part de la *denotació*.[1]

Evidentment, si hom substitueix un nom propi o una expressió denotativa que figurin en un enunciat per una altra expressió amb la mateixa denotació però un significat diferent, la denotació de l'enunciat en qüestió romandrà intacta, però no així el seu significat. Així, utilitzant el mateix exemple de Russell, tenim que els enunciats "L'actual Primer Ministre d'Anglaterra és el nebot de l'anterior Primer Ministre d'Anglaterra" i "Mr. Arthur Balfour és el nebot de Lord Salisbury" denoten el mateix *fet*, però el significat d'ambdues frases és ben diferent. En aquest manuscrit, en efecte, Russell explica el valor semàntic dels enunciats dient que aquests *denoten fets* o *proposicions* i també que els seus *significats* denoten *proposicions*.[2] És clar, doncs, que directament o indirecta -a través dels seus *significats*-, els enunciats denoten proposicions o fets. És veritat que Russell assenyala sovint que la denotació és una propietat del *significat* de les expressions denotatives i per extensió també ha der ser-ho, doncs, del *significat* dels enunciats. Però en cap moment Russell afirma que les proposicions siguin els *significats* dels enunciats i, en canvi, afirma taxativament que les

---

1 *Russell 1994*, 284.

2 *Ibid.*, 284 i 287.

entitats o termes denotats formen part de les proposicions. En altres paraules, la tesi exposada en aquest article segons la qual els enunciats denoten proposicions o fets és perfectament coherent amb les tesis sostingudes a *Principles* i en la correspondència amb Frege, la qual cosa permet dibuixar una posició semàntica genuïnament russelliana i oposada a la semàntica fregeana, si més no en un aspecte essencial, a saber, aquell que fa referència a la denotació dels enunciats. Car, com és ben sabut, per a Frege els enunciats denoten el seu valor de veritat (*Cf. supra*, cap. V, § 7).

Per veure les diferències entre una teoria semàntica i l'altra, vegem com interpreten Russell i Frege un enunciat com ara "l'actual rei de França és calb", això és, un enunciat en el qual hi figura una expressió denotativa -en aquest cas, una descripció definida- que no té cap denotació. En aquest cas, assenyala Russell, "hi ha un concepte complex, el qual és el significat de "l'actual rei de França és calb", i aquest concepte té la forma d'aquells que denoten proposicions. Però en el cas particular considerat, el concepte no denota una proposició",[1] car en ell hi figura un concepte -el *significat* de "l'actual rei de França"- que no denota res. Per tant, conclou Russell, "haurem de dir que "l'actual rei de França és calb" no és vertadera ni falsa, car la veritat i falsedat tenen a veure amb el que un enunciat *denota*, no amb el que *significa*".[2] En definitiva, segons Russell, l'enunciat anterior té significat, car tots els enunciats en tenen, encara que algun dels seus constituents no en tingui -aquest és el cas dels noms propis-; però no té denotació, car per a que un enunciat tingui denotació cal que totes les expressions susceptibles de denotar que figurin en ell -noms propis i descripcions- denotin realment. Per a Frege, en canvi, l'enunciat anterior tindria *sentit* [*Sinn*] -l'equivalent al *significat* [*meaning*] russellià- i *significat* [*Bedeutung*] -l'equivalent, amb les precisions esmentades abans, a la *denotació* [*denotation*] russelliana. Segons Frege, en efecte, tots els enunciats tenen alhora sentit i denotació car, encara que algun dels constituents no tingui denotació car, en aquest cas, hom n'hi haurà d'assignar arbitràriament una. Així, en l'exemple que ens ocupa, hom podria assignar a "l'actual rei de França" la classe buida, que no té evidentment la propietat de ser calba i, per tant, "l'actual rei de França és calb" seria un enunciat fals (*Cf. supra*, cap. V, §§ 7 i 8). Ara bé, és evident, com assenyala Russell a "On Denoting" que "aquest procediment, encara que no porta de fet a cap error lògic, és clarament artificial, i no ofereix una anàlisi exacta del problema".[3]

---

[1] *Ibid.*, 286.
[2] *Ibid.*, 286.
[3] *Ibid.*, 420.

Podem estendre la teoria semàntica anterior *mutatis mutandi* als enunciats falsos? Si responem afirmativament, llavors hauríem d'interpretar un enunciat fals qualsevol com ara "Shakespeare és cec" com denotant la ceguesa de Shakespeare, la qual cosa no és evidentment un fet i, per tant, l'enunciat anterior no denotaria res. Ara bé, afirma Russell, "si decidim que en totes les proposicions falses hi manca la denotació, haurem de dir que la veritat i falsedat pertanyen [*attach*] als significats, no a les denotacions".[1] Però abans havíem dit que la veritat i falsedat tenien a veure amb la denotació, no pas amb el significat, per la qual cosa l'anàlisi anterior sembla dur-nos a una contradicció o al menys a un *impasse* important. Aquest *impasse* sorgeix, en efecte, perquè els enunciats falsos semblen obligar a escollir entre dues tesis fonamentals de Russell: (*a*) les proposicions són la denotació dels enunciats -o dels seus significats- i (*b*) la veritat i falsedat són propietats de les proposicions, no dels enunciats ni dels seus *significats*. Aquesta segona tesi està en consonància amb la tesi de *Principles* segons la qual les proposicions són el veritable objecte d'estudi de la lògica -i, per tant, si la veritat i la falsedat tenen algun interès pel lògic, han de ser propietats de les proposicions- i, com veurem més endavant, té una importància cabdal en la formulació russelliana de la paradoxa del mentider.

Una primera valoració de les semàntiques russelliana i fregeana seria la següent: Un clar avantatge de la primera és que en ella la denotació és quelcom homogeni, que fa referència sempre al que podríem anomenar la *realitat empírica* -constituïda per objectes i fets-. Per contra, per a la segona, la denotació és quelcom heterogeni, car fa referència tant als objectes -que formen part de la realitat empírica- com als valors de veritat. Frege salva aquesta heterogeneïtat a *Grundgesetze* considerant els valors de veritat com a *objectes* del mateix tipus que els cursos de valors i els individus, i distingint nítidament entre *objecte* i *funció*. Però és clar que tant aquesta solució com el fet de considerar el valor de veritat d'un enunciat com el seu significat o denotació són, si més no, contràries al sentit comú, o almenys així ho veia Russell. És ben cert, d'altra banda, que la solució fregeana evita els problemes als quals es veu sotmesa la teoria de Russell a l'hora d'explicar els enunciats falsos. Però, per a Russell, el remei fregeà era pitjor que la malaltia i, per tant, calia continuar buscant altres solucions més ajustades al sentit comú.

La segona part del manuscrit que estem comentant mostra la relació entre els problemes estudiats fins ara i els problemes referents a la fonamentació lògica de les matemàtiques. El problema tractat aquí per Russell és el mateix que es planteja en altres

---

[1] *Ibid.*, 287.

manuscrits de la mateixa època i que cal situar en el marc de la *teoria funcional* -que donarà lloc a l'any següent a la teoria *zig-zag*. El problema és el següent: Sigui X una expressió que conté x -per exemple, "x és un home" o "sin$x$"- i sigui $\dot{x}\,(X)$ la funció implícita en l'expressió X -i.e. "ésser un home" o "sin". Si $\dot{x}\,(X)$ és realment una funció, llavors X s'anomenarà un *complex funcional*. Ara bé, $\dot{x}\,(X)$ no és sempre una funció, com ha mostrat la Contradicció descoberta per Russell. Cal preguntar-se, doncs, quines condicions ha de satisfer X per a que $\dot{x}\,(X)$ sigui una funció, això és, sota quines condicions X és un complex funcional. El problema al qual s'enfronta Russell és, doncs, el d'establir les regles a partir de les quals hom pot definir funcions mitjançant l'operador d'abstracció funcional. Ara bé, aquest problema és evidentment anàleg al de la formació de noms abstractes -ex: *negror*- a partir d'adjectius -ex: *negre*-, el qual és estrictament un problema de *gramàtica filosòfica*.

El segon manuscrit de la sèrie dedicat al tema de la denotació és 'On Meaning and denotation' (*1903*$_b$) i en ell Russell posa en qüestió alguns aspectes fonamentals de la teoria semàntica esbossada en el manuscrit anterior. Russell qüestiona, d'una banda, la possibilitat de distingir *significat* i *denotació* en els enunciats i, d'una altra, la tesi segons la qual els fets o proposicions serien la denotació dels enunciats. La crítica a la primera tesi esbossa ja les idees fonamentals que Russell utilitzarà en el manuscrit "On Fundamentals" i en l'article "On Denoting" per rebutjar definitivament la distinció entre *significat* i *denotació* i, per tant, ajornarem la seva anàlisi fins que estudiem aquests articles. La segona tesi és de bon començament reemplaçada per la tesi segons la qual els enunciats no denoten una proposició, sinó que l'afirmen [*assert*]. Ara bé, aquesta tesi alternativa planteja problemes molt semblants a l'anterior si continuem acceptant que els enunciats denoten quelcom. Car, si la denotació és allò afirmat, llavors la constatació que els enunciats falsos també afirmen quelcom ens duu a un *impasse* idèntic al que ens duia la teoria semàntica esbossada en el manuscrit anterior. Si, en canvi, la denotació no és allò afirmat, llavors haurem de decidir què és allò denotat i quina relació té amb allò afirmat, problema de difícil solució. En definitiva, les dificultats inextricables que suposa admetre que els enunciats tenen significat i denotació porta a Russell a l'abandó definitiu d'aquesta distinció.

El darrer manuscrit dedicat al tema de la denotació és "On Fundamentals" (*1905*$_a$) i és, sens dubte, el més important. Aquest manuscrit data de mitjans de 1905 i conté ja la majoria de les idees principals de la nova teoria de les descripcions exposada poc després en el seu conegut article "On Denoting", així com també algunes idees bàsiques dels escrits posteriors -com, per exemple, la consideració de les classes com a símbols incomplets.

Russell comença aquest article exposant una teoria semblant a la dels articles anteriors. Un complex o concepte denotatiu, assenyala Russell, té *ésser* [*being*] i *significat* [*meaning*] i pot figurar en una proposició com a ésser o entitat i com a significat. Segons Russell, "si un complex figura com a ésser pot substituir-se per qualsevol altre complex que tingui la mateixa denotació, o la denotació mateixa, sense alterar la veritat o no veritat del complex [proposicional] en el qual aquest complex figura".[1] Es dóna per suposat que, si un complex no satisfà aquesta condició, llavors figura com a significat. Aquesta distinció ve imposada pels problemes plantejats arran de les anomenades *actituds proposicionals* [*propositionals attitudes*] com, per exemple, els enunciats "La gent estava sorpresa que Scott fos l'autor de Waverley" o "Jordi IV volia saber si Scott era l'autor de Waverley", emprats respectivament com exemples en els dos articles de 1905 abans esmentats. En aquests casos, en efecte, el complex "l'autor de Waverley" figura com a *significat*, car si el substituïm per la seva denotació (Scott), llavors els enunciats esdevenen falsos. Per contra, en l'enunciat "Scott era l'autor de Waverley", la substitució anterior no altera el valor de veritat, per la qual cosa el complex "l'autor de Waverley" figura com a *entitat*. Tanmateix, la qüestió no és tan senzilla, car Russell imposa una altra condició per decidir si un complex figura com a entitat, a saber, que pugui substituir-se per qualsevol altre complex amb la mateixa denotació o per la denotació mateixa, sense que això impliqui la pèrdua de *significació* [*significance*] o *sentit* [*sense*] de l'enunciat en el qual aquest complex figura. I, tenint en compte aquest segon requisit, el complex "l'autor de Waverley" figura com a entitat en qualsevol dels enunciat anteriors. Així, assenyala Russell, "semblaria que hi ha un tercer tipus d'ocurrència d'un complex, en el qual l'ocurrència és una ocurrència d'entitat pel que fa a la significació i una ocurrència de significat pel que fa a la veritat".[2] Segons Russell, la "solució natural" a aquesta problemàtica seria adoptar el punt de vista fregeà, segons el qual en les actituds proposicionals, la clàusula subordinada figuraria sempre com a *significat* (el *sentit* fregeà) i, per tant, "l'autor de Waverley" figuraria com a significat en aquests tipus d'enunciats i com a entitat en la resta d'enunciats. Però llavors, assenyala Russell, "hauríem de trobar alguna manera de distingir entre el significat i l'ésser d'una proposició; i això no és fàcil".[3] Russell obvia tanmateix aquesta dificultat i considera l'aplicació d'aquesta distinció a les proposicions. Però aleshores la teoria es complica molt, en veure's Russell obligat a distingir sis tipus diferents d'ocurrències dels complexos -no proposicionals- en lloc de dos. Aquesta

---

1 *Ibid.*, 369.
2 *Ibid.*, 370.
3 *Ibid.*, 370.

excessiva complicació de la teoria suggereix per si mateixa l'abandó del punt de partida: la distinció entre significat i denotació, no només pel que fa als complexos proposicionals, sinó també pels complexos o conceptes denotatius pròpiament dits. Amb tot, l'argument definitiu contra aquesta distinció es desenvolupa a partir del paràgraf 31 d'"On Fundamentals", en els mateixos termes i amb els mateixos exemples que a "On Denoting", que estudiarem a continuació a partir de l'estudi d'aquest darrer article.

En el conegut article "On Denoting", aparegut a la revista *Mind* a l'octubre de 1905, Russell proposarà una nova teoria de les descripcions, la qual sistematitza de forma definitiva la majoria de les idees esbossades a "On Fundamentals" i en la qual es dóna resposta als interrogants més importants plantejats per la teoria de la denotació de *Principles*, recollits en els manuscrits immediatament posteriors a aquesta obra. La importància d'aquest article és ben palesa si es té en compte que (*i*) la doctrina exposada en ell és l'adoptada a *Principia Mathematica* i *An Introduction to Mathematical Philosophy* i (*ii*) la seva enorme influència en la filosofia analítica contemporània. Els punts essencials d'aquest articles són: l'exposició de la nova teoria de les descripcions, la crítica a les teories de Meinong i Frege -i, en definitiva, a la seva pròpia de *Principles*- i la comprovació de la nova teoria mitjançant la resolució d'una sèrie de *puzzles* o trencaclosques que, suposadament, la vella teoria era incapaç de resoldre. Essencialment, la teoria de les descripcions exposada a "On Denoting" suposa una nova anàlisi de les expressions denotatives basada en la noció de *variable*, la noció de *funció proposicional* i la noció d'una funció proposicional "essent sempre vertadera", això és, la proposició "$C(x)$ és sempre vertadera" o, el que és el mateix, el *quantificador universal*. En efecte, a partir d'elles, assenyala Russell:

> *Tot* [*everything*], *no-res* [*nothing*] i *quelcom* [*something*] (que són les frases denotatives més primitives) s'interpretaran com segueix:
>
> C(tot) significa "$C(x)$ és sempre vertadera";
>
> C(no-res) significa ""$C(x)$ és falsa" és sempre vertadera";
>
> C(quelcom) significa "És fals que "$C(x)$ és falsa" és sempre vertadera".[1]

L'anàlisi de les descripcions, les quals segueix anomenant frases o expressions denotatives, es realitza a partir de l'anàlisi anterior. Així, per exemple:

[1] *Ibid.*, 416.

“*C*(tot home)” significa ““Si *x* és humà, llavors *C*(*x*) és vertadera” és sempre vertadera”

i

“*C*(un home)” significa “És fals que “*C*(*x*) i *x* és humà” sigui sempre fals”.

Les frases denotatives amb *cada* i *algun* es consideren ara equivalents respectivament a les anteriors i, com a novetat respecte a la llista de frases denotatives de *Principles*, s’introdueixen també les expressions amb *cap*. Així, per exemple:

“*C*(cap home)” significa “Si *x* és humà, llavors “*C*(*x*) és fals” és sempre vertadera”.

Evidentment resten encara les descripcions definides, “de bon tros les més interessants i difícils de les frases denotatives”.[1] Amb tot, l’anàlisi russelliana resulta avui en dia prou familiar:

> Considerem, per exemple, “el pare de Carles II fou executat”. Aquest enunciat afirma que hi havia un *x* que era el pare de Carles II i fou executat. Ara bé, quan “el” és emprat estrictament, implica unicitat [...] Així, quan diem “*x* fou *el* pare de Carles II” no afirmem només que *x* té una certa relació amb Carles II, sinó també que res més té aquesta relació [...] D’aquesta manera, “*x* és el pare de Carles II” esdevé “*x* engendrà Carles II; i “si *y* engendrà Carles II, *y* és idèntic a *x*” és sempre vertadera de *y*”. Així, “el pare de Carles II fou executat” esdevé:
>
> “No és sempre fals de *x* que *x* engendrà Carles II i que *x* fou executat i que “si *y* engendrà Carles II, *y* és idèntic a *x*” és sempre vertadera de *y*”.[2]

En altres paraules, un enunciat en el qual s’adscriu una propietat a un cert objecte donat mitjançant una descripció definida és equivalent a un enunciat en el qual s’afirma que *existeix* un *únic* objecte que satisfà el predicat implícit en la descripció i que té la propietat en

[1] *Ibid.*, 417.
[2] *Ibid.*, 417.

qüestió. Així, en l'exemple esmentat per Russell, l'enunciat "el pare de Carles II fou executat" esdevé:

> "Hi ha un *x* tal que *x* engendrà Carles II i tal que *x* fou executat i, per tot *y*, "si *y* engendrà Carles II, *y* és idèntic a *x*".

És a dir, que tot enunciat de la forma $G((\iota x)Fx)$ és equivalent a un enunciat de la forma (en notació moderna):

$$\exists x[Fx \wedge \forall y(Fy \rightarrow y = x) \wedge Gx].$$

Aquesta és precisament l'anàlisi que trobem en la Introducció a la primera edició de *Principia Mathematica*, on Russell dóna la següent definició:[1]

$$f\{(\iota x)(\phi x)\} \cdot = : (\exists c) : \phi x \cdot \equiv_x \cdot x = c : fc. \qquad \text{Df}$$

És a dir, que una expressió del tipus "el pare de Carles II fou executat", $G((\iota x)Fx)$ en notació moderna, és equivalent a:

$$\exists x[\forall y(Fy \leftrightarrow y = x) \wedge Gx]$$

o, el que és el mateix, a:

$$\exists x[Fx \wedge \forall y(Fy \rightarrow y = x) \wedge Gx].$$

Una vegada exposats els trets essencials de la teoria de les descripcions de l'article "On Denoting", convé fer un primer balanç. En primer lloc, cal remarcar amb Russell que l'anàlisi anterior "dóna una reducció de totes les proposicions en les quals hi figuren frases denotatives a formes en les quals no hi figura cap frase d'aquesta mena".[2] Per exemple, d'acord amb el que acabem de veure, podríem dir que a "On Denoting" Russell analitza o interpreta l'enunciat "el pare de Carles II fou executat" com una proposició de la forma:

---

1 *Russell 1910*, 68.

2 *Russell 1994*, 418.

$$\exists x[x \text{ engendrà Carles II } \wedge x \text{ fou executat } \wedge \forall y(y \text{ engendrà Carles II} \rightarrow y = x)]$$

i, per tant, com una proposició en la qual ha desaparegut el concepte denotatiu expressat per *el pare de Carles II*. Russell expressa exactament la mateixa idea, emprant la terminologia de *Principles*, quan observa "que les frases denotatives no tenen mai cap significat en si mateixes, però que tota proposició en l'expressió verbal de les quals figuren té un significat".[1] Car, en efecte, a diferència de *Principles*, en el qual l'anàlisi dels enunciats feia correspondre a cada frase denotativa un concepte denotatiu a nivell proposicional, a "On Denoting" l'anàlisi no atorga cap significat a les frases denotatives però si, en canvi, als enunciats en els quals elles figuren, essent aquest significat una proposició de la qual han desaparegut els conceptes denotatius i han estat substituïts per les nocions de *variable*, *funció proposicional* i *quantificador universal*. En definitiva, les frases denotatives o descripcions esdevenen a partir d'"On Denoting" el que a *Principia Mathematica* anomenarà *símbols incomplets*, això és, símbols que no signifiquen res isoladament, però que adquireixen significació a través dels diferents contextos en què són utilitzats.

La discussió anterior és particularment rellevant si es té en compte que, segons Russell, "l'evidència de la teoria anterior es deriva de les dificultats que semblen inevitables si considerem que les frases denotatives representen constituents genuïns de les proposicions en l'expressió verbal de les quals figuren"[2]. Ara bé, ¿quines són aquestes dificultats que plantejaria la vella teoria de la denotació i que haurien portat Russell a la seva substitució per la nova teoria exposada a "On Denoting"? La primera dificultat faria referència, segons Russell, a la interpretació semàntica dels enunciats que contenen descripcions definides sense objecte. En efecte, assenyala Russell:

> Si diem "el rei d'Anglaterra és calb", aquest enunciat no és, segons sembla, sobre el significat complex "el rei d'Anglaterra", sinó sobre l'home actual denotat pel significat. Però, considerem ara [l'enunciat] "el rei de França és calb". Per paritat de forma, aquest [enunciat] també hauria de ser sobre la denotació de la frase "el rei de França". Però aquesta frase, encara que té un significat, no té certament cap denotació, al menys en cap sentit obvi. D'aquí hom podria suposar que "el rei França és calb" hauria de ser [un enunciat] mancat de sentit [*nonsense*]; però no és mancat de sentit, sinó que és clarament fals.[3]

1 *Ibid.*, 416.
2 *Ibid.*, 418.
3 *Ibid.*, 419.

L'argument de Russell és prou clar: De la mateixa manera que, d'acord amb la vella teoria dels conceptes denotatius, l'enunciat "el rei d'Anglaterra és calb" fa referència al rei d'Anglaterra en persona, llavors l'enunciat "el rei de França és calb" hauria de fer referència al rei de França. Però no hi ha cap rei de França (som a 1905) i, per tant, aquest últim enunciat no denotarà cap fet o proposició (recordem el principi de composicionalitat) i, doncs, estarà mancat de valor de veritat -car, recordem-ho, veritat i falsedat són propietats de les proposicions- i, per tant, estarà mancat de sentit. Ara bé, protesta Russell, no l'està pas, perquè d'acord amb la nova teoria de la denotació exposada a "On Denoting" és clarament fals -com veurem més endavant, no és sempre fals, però això ara no importa. Així, conclou Russell, "o bé hem de fornir una denotació en els casos en què a primera vista és absent, o hem d'abandonar el punt de vista segons el qual la denotació és allò al qual fan referència les proposicions que contenen frases denotatives".[1] La segona alternativa és la defensada per Russell a "On Denoting" i se segueix immediatament de l'anàlisi de les expressions denotatives exposat abans. La primera alternativa és la defensada per Meinong i Frege -i per ell mateix a *Principles*-, que Russell criticarà en els següents termes:

1. *Meinong*, en la seva *Gegenstandtheorie* [*teoria dels objectes*] feia correspondre a cada frase denotativa un determinat *objecte*, el qual sempre tindria *ésser* encara que no tingués *subsistència* o *existència* real. De manera que, per exemple, el rei de França existiria sempre *qua* objecte, encara que no existís en el sentit habitual del terme, la qual cosa viola, segons Russell, la llei de contradicció. Però, conclou Russell, "això és intolerable; i, si es troba qualsevol teoria que eviti aquest resultat, serà segurament preferible".[2]

2. Frege distingia en cada frase denotativa entre *significat* i *denotació* i considerava que aquesta última no havia de mancar mai en el discurs científic, de manera que hom havia de fornir convencionalment una denotació en els casos en què, d'altra manera, aquesta manqués. Així, per exemple, Frege defineix la denotació d'una descripció definida sense objecte -com ara *el rei de França*- com l'extensió del predicat de la descripció, això és, com la classe buida. Però aquest procediment, assenyala Russell, "encara que no porta de fet a cap error lògic, és clarament artificial, i no ofereix una anàlisi exacta del problema".[3]

---

1 *Ibid.*, 419.
2 *Ibid.*, 418.
3 *Ibid.*, 420.

Russell havia conjugat en la teoria de la denotació de *Principles* els trets essencials de les teories de Meinong i Frege. Segons aquella teoria, en efecte, tota expressió denotativa té un *significat*, a saber, un *concepte denotatiu*, i, a través d'ell, té també una *denotació,* un *terme* o una determinada *combinació de termes*. D'altra banda, aquest terme o termes tenen sempre ésser [*being*] i, per això, s'anomenen també *entitats*, encara que no tinguin necessàriament *existència* -aquest serà el cas precisament de les descripcions definides sense objecte. Així, doncs, les crítiques adreçades a les solucions *à la Meinong* i *à la Frege* al problema plantejat per les descripcions definides sense objecte són extensibles *mutatis mutandi* a la seva teoria de la denotació de *Principles*. D'una banda, la solució de Meinong basada en la distinció entre ésser i subsistència és rebutjada com *autocontradictòria* i com a metafísicament inacceptable. D'una altra, la solució de Frege basada en l'assignació arbitrària d'una denotació a les descripcions definides sense objecte és rebutjada com *artificiosa*. Ara bé, aquesta artificiositat no és ni de bon tros la raó fonamental per la qual Russell abandona a "On Denoting" la distinció fregeana entre significat i denotació que, si bé amb diferents matisos, Russell havia fet seva d'ençà *Principles*. La raó principal és una sèrie de dificultats inextricables plantejades per aquesta distinció, que Russell havia esbossat en els manuscrits "On Meaning and Denotation" i "On Fundamentals" i que publicarà per primera vegada a "On Denoting". Segons Russell, en efecte:

> La relació del significat a la denotació entranya certes dificultats prou curioses, que semblen suficients per si mateixes per provar que la teoria que condueix a tals dificultats ha de ser errònia.[1]

Aquesta relació a la qual fa referència Russell com a font de dificultats inextricables és evidentment la relació de *denotació* que des del punt de vista russellià és, com ja sabem, una relació a través de la qual els *significats* de les frases denotatives -els conceptes denotatius- *denoten* certes entitats o termes. Les dificultats les descobreix Russell reflexionant sobre l'ús de les cometes per parlar del *significat* d'una expressió denotativa. En efecte, segons Russell:

> Quan volem parlar del *significat* d'una frase denotativa com a oposat a la seva *denotació*, la manera natural de fer-ho és utilitzant les cometes. Així diem:
>
> El centre de la massa del sistema solar és un punt, no un complex denotatiu;

1 *Ibid.*, 421.

“El centre de massa del sistema solar” és un complex denotatiu, no un punt.

O, anàlogament

La primera línia de l’Elegia de Gray enuncia una proposició.

“La primera línia de l’Elegia de Gray” no enuncia una proposició.[1]

En altres paraules, si volem parlar del significat d’una frase denotativa qualsevol *C*, això és, del complex denotatiu expressat per *C*, haurem de posar *C* entre cometes o bé, com ja havia assenyalat Frege, utilitzar el gir “el significat de “*C*””.[2] Ara bé, quin és el significat de “*C*”? Està clar que aquest significat no pot ser el complex denotatiu expressat per *C* car, com assenyala Russell, “des del moment en què posem un complex denotatiu en una proposició, la proposició és sobre la denotació”[3] i, per tant, “per parlar de *C* mateix, *i.e.* per fer una proposició sobre el significat [de *C*], el nostre subjecte no ha de ser *C*, sinó quelcom que denoti *C*”.[4] Sigui, en efecte, l’*enunciat* següent:

“ “L’autor de Waverley” és un concepte denotatiu”;

si el significat de “l’autor de Waverley” fos el concepte denotatiu *l’autor de Waverley*, llavors la proposició corresponent faria referència a Scott, com quan diem, per exemple,

“L’autor de Waverley va escriure Ivanhoe”.

D’aquí que el significat de “l’autor de Waverley” no pugui ser *l’autor de Waverley*, sinó un altre complex denotatiu que denoti alhora aquest complex. Així doncs, el significat de “*C*” no pot ser mai *C* mateix, sinó un complex denotatiu que denoti alhora *C*. Ara bé, es pregunta Russell, on trobarem aquest complex denotatiu que denoti *C*? Hom podria pensar evidentment en quelcom anàleg a nivell de significat a la posada entre cometes a nivell lingüístic. Podríem considerar, en efecte, que “*C*” *significa* un complex denotatiu **C**, on **C** designaria el resultat de posar entre asteriscs el significat de *C*, de manera que **C**

[1] *Ibid.*, 421.

[2] La idea és original d’“Über Sinn und Bedeutung”. Observem, en efecte, que la frase “el significat de *C*” ens dóna, en el millor dels casos, el significat de la denotació de *C*. Així, per exemple, si *C* és la frase denotativa “el primer vers de l’Elegia de Gray”, llavors “el significat de *C*” és equivalent a “el significat de “The curfew tolls the knell of parting day””, mentre que “el significat de “*C*”” és equivalent a “el significat d’“el primer vers de l’Elegia de Gray””, que és el que volíem. Així, doncs, “el significat de “*C*”” és equivalent *en ús* a “*C*”.

[3] *Ibid.*, 422.

[4] *Ibid.*, 422.

denotés *C* -*i.e.* de manera que quan **C** figurés en una proposició, aquesta fes referència a *C* mateix o, més exactament, al significat de *C*. Així, per exemple, en el primer dels enunciats anteriors el *significat* de la frase denotativa "*l'autor de Waverley*" seria **l'autor de Waverley**, el qual *denotaria* alhora un altra concepte denotatiu, a saber, *l'autor de Waverley*. Car, en efecte, la *proposició* en la qual ocorre *L'autor de Waverley* no és *sobre Scott* o quelcom altre, sinó sobre el concepte denotatiu *l'autor de Waverley*. Així, conclou Russell, semblaria que **C** denota *C*; però això no pot ser una explicació, perquè la relació de **C** a *C* "roman completament misteriosa".[1] En efecte, seguint amb l'exemple anterior, semblaria que el concepte denotatiu **l'autor de Waverley* denota l'autor de Waverley*, de la mateixa manera que aquest últim concepte denotatiu *denota* Scott. Ara bé, ¿es pot parlar pròpiament de *denotació* en el primer cas? Evidentment no, si s'entén per denotació el que s'havia entès fins ara, a saber, la relació a través de la qual determinats conceptes fan referència a determinades entitats o termes i hom té present que la línia divisòria dibuixada d'ençà *Principles* entre termes i conceptes és infranquejable. És en aquest sentit que, segons Russell, la relació de **l'autor de Waverley** a *l'autor de Waverley* i, en general, la relació entre el significat d'una expressió denotativa i llur denotació, quan aquesta és alhora un concepte denotatiu, "roman completament misteriosa". A banda d'això, és evident que si acceptéssim la solució anterior, llavors ens veuríem obligats a reconèixer l'existència d'una jerarquia infinita de conceptes denotatius completament *ad hoc* -en el sentit que només seria necessària per satisfer les exigències de la teoria basada en la distinció entre significat i denotació- i a reformular la mateixa noció de denotació, car la vella definició només restaria vàlida pels conceptes, podríem dir-ne, de primer ordre.

L'altra dificultat que planteja la distinció entre significat i denotació rau en què "quan [un concepte denotatiu] *C* figura en una proposició, no és *només* la denotació que hi figura (com veurem en el següent paràgraf); però, des del punt de vista en qüestió, *C* és només la denotació, estant el significat relegat completament a "*C*"".[2] La dificultat sorgeix, com el lector de bon segur ja ha endevinat, de la consideració de les *actituds proposicionals*. En efecte, tal com escriu Russell en el paràgraf a què fa referència el text anterior:

> La proposició "Scott era l'autor de Waverley" té una propietat que no posseeix "Scott era Scott", a saber, la propietat que Jordi IV volia saber si era vertadera. Així, doncs, les dues proposicions no són idèntiques; d'aquí que tant el

---

1 *Ibid.*, 422.
2 *Ibid.*, 422.

significat de "l'autor de Waverley" com llur denotació siguin rellevants, si ens adherim al punt de vista al qual aquesta distinció pertany. Però, com acabem de veure, tan aviat ens adherim a aquest punt de vista, ens veiem obligats a sostenir que només la denotació pot ser rellevant. Així, el punt de vista en qüestió ha de ser abandonat.[1]

En altres paraules, d'acord amb el que hem vist abans, la vella teoria de la denotació -a la qual pertany la distinció entre significat i denotació- ens duu a afirmar que quan un concepte denotatiu *C* figura en una proposició, *només* la denotació és rellevant. Per contra, la consideració de les actituds proposicionals a la llum d'aquesta mateixa teoria ens duu a afirmar que també el significat és rellevant. Car si només la denotació fos rellevant, l'actitud de Jordi IV respecte a les proposicions -o fets- denotats pels enunciats "Scott era Scott" i "Scott era l'autor de Waverley" hauria de ser la mateixa i, en canvi, no ho és -a no ser, assenyala Russell irònicament, que atribuïm al rei d'Anglaterra un cert interès per la llei d'identitat. De manera que la proposició "Jordi IV volia saber si Scott era l'autor de Waverley" és vertadera, mentre que la proposició "Jordi IV volia saber si Scott era Scott" és falsa. Ara bé, hom podria objectar a Russell que, de la mateixa manera que ens veiem obligats a acceptar la distinció entre significat i denotació per la consideració de les actituds proposicionals, també hauríem de rebutjar per aquest motiu la tesi segons la qual *només* la denotació és rellevant quan un concepte denotatiu figura en una proposició. Car aquesta tesi esdevé insostenible des del mateix moment en què considerem les actituds proposicionals. Veiem així que aquest segon argument russellià contra la distinció entre significat i denotació és completament *ad hoc* i, per tant, esta lluny de ser un argument concloent.[2] L'únic argument definitiu contra aquesta distinció és, doncs, el primer que hem estudiat i que fa referència a les dificultats que planteja la relació entre significat i denotació.

En definitiva, els arguments anteriors porten Russell a l'abandó definitiu de la distinció entre significat i denotació i, molt especialment, al rebuig de la centralitat d'aquesta última relació en l'anàlisi lògica -és a dir, en l'anàlisi de les proposicions que, d'ençà *Principles*, constitueixen el veritable objecte d'estudi de la lògica-, car la relació de significat no ha tingut mai cap paper rellevant en aquest sentit. Ja hem vist abans, en efecte, que

---

1 *Ibid.*, 422-23.

2 De fet, la conclusió a la qual arriba Russell referent a la necessitat d'abandonar la distinció entre significat i denotació es deduiria, en tot cas, de les dificultats que suposaria bastir una teoria del significat i la denotació que donés raó de les actituds proposicionals, però evidentment aquestes dificultats no poden ser un argument definitiu contra la distinció entre significat i denotació.

l'anàlisi dels enunciats que contenen descripcions duu Russell a abandonar tant la concepció que les descripcions tenen significat *per se* com la concepció segons la qual la denotació seria allò al qual fan referència les proposicions expressades per aquells enunciats. I acabem de veure la crítica russelliana a la distinció entre significat i denotació que el duria definitivament a l'abandó d'aquesta distinció. Evidentment, això no vol dir que Russell deixi d'emprar les paraules denotar i significar, sinó simplement que aquestes paraules deixaran de tenir el sentit tècnic que havien tingut fins ara. Així, assenyala Russell respecte d'una descripció definida qualsevol "*C*", "podria ocórrer que hi hagués una entitat *x* (no n'hi pot haver més d'una) per la qual la proposició "*x* és idèntic a *C*" fos vertadera [...] Llavors *podríem* dir que *x* és la denotació de al frase "*C*". Així, Scott és la denotació de "l'autor de Waverley"".[1] En altres paraules, podríem parlar de la relació de denotació com una relació entre una expressió denotativa i allò designat per ella, llur *denotació*, però aquesta relació serà a partir d'ara una relació lingüística, sense cap interès des del punt de vista lògic. Vegem, en definitiva, que "On Denoting" no exposa cap teoria de la denotació si no és per negar-la. Aquesta és, sens dubte, l'ensenyança més important d'aquest article.

Vegem finalment com la nova teoria de les descripcions soluciona les dificultats davant de les quals la vella teoria de la denotació no tenia, si més no aparentment, resposta. Totes elles, paga la pena dir-ho, fan referència a enunciats en els quals figuren descripcions definides, per la qual cosa hom es refereix sovint a la nova teoria de la denotació amb el nom de *teoria de les descripcions*. Aquestes dificultats fan referència, en efecte, als enunciats en els quals figuren descripcions definides sense objecte i a aquells en què aquestes descripcions figuren en contextos intensionals (les *actituds proposicionals*). Russell torna a plantejar aquestes dificultats a través del tres *puzzles* següents, no exempts d'ironia:

> (1) Si *a* és idèntic a *b*, qualsevol cosa que sigui veritat de l'un ho serà també de l'altre, i qualsevol dels dos podria ser substituït per l'altre en qualsevol proposició sense alterar la veritat o falsedat d'aquesta proposició. Ara, (*i*) Jordi IV volia saber si Scott era l'autor de *Waverley*; i, de fet, (*ii*) Scott *era* l'autor de *Waverley*. Així, podríem substituir l'autor de *Waverley* per Scott i provar llavors que (*iii*) Jordi IV volia saber si Scott era Scott. Però un interès en la llei d'identitat difícilment pot ser atribuït al primer cavaller d'Europa.
>
> (2) Per la llei de terç exclòs, o bé "A és B" o "A és no B" ha de ser vertadera. Així, o bé (*i*) "l'actual rei de França és calb" o bé (*ii*) "l'actual rei de França no és

[1] *Ibid.*, 423. L'èmfasi és nostre.

calb" ha de ser vertadera. Però si enumerem les coses que són calbes i les coses que no són calbes, no trobaríem l'actual rei de França en cap llista. El hegelians, a qui els encanta la síntesi, conclourien probablement que portava capell.

> (3) Considerem la proposició "*A* difereix de *B*". Si és vertadera, llavors hi ha una diferència entre *A* i *B* i aquest fet podria expressar-se en la forma "la diferència entre *A* i *B* subsisteix". Però si és fals que *A* difereix de *B*, llavors no hi ha diferència entre *A* i *B* i aquest fet podria expressar-se en la forma "la diferència entre *A* i *B* no subsisteix". Però, ¿com pot ser una no-entitat el subjecte d'una proposició? [...] Així, si *A* i *B* no difereixen, suposar que o bé hi ha, o bé no hi ha un objecte com "la diferència entre *A* i *B*" sembla igualment impossible.[1]

De fet, el *puzzle* sobre la curiositat de Jordi IV té una "solució molt fàcil": Simplement, "la proposició "Scott era l'autor de *Waverley*" [...] no té cap constituent com ara "l'autor de *Waverley*" pel qual puguem substituir "Scott"".[2] En efecte, com ja sabem, l'enunciat anterior s'analitza a "On Denoting" en una proposició de tipus quantificacional, en la qual no hi ha cap constituent corresponent a la descripció "l'autor de Waverley" que pugui denotar Scott, per la qual cosa la regla de substitució no és aplicable a (*ii*) i, per tant, la inferència que donava lloc a l'enigma sobre la curiositat de *Jordi IV* no és una inferència lògica.

La solució del segon puzzle requereix la distinció entre ocurrència *primària* i *secundària* d'una descripció definida en un enunciat. Aquesta distinció, que s'havia introduït ja a "On Fundamentals", l'explica Russell a partir de l'enunciat sobre *Jordi IV* i *Waverley* en els termes següents:

> Quan diem (*i*) "Jordi IV volia saber si Scott era l'autor de *Waverley*", normalment volem dir (*i*)' "Jordi IV volia saber si un i un sol home va escriure *Waverley* i Scott era aquest home"; però també *podríem* voler dir: (*i*)'' "Un i un sol home va escriure *Waverley*, i Jordi IV volia saber si Scott era aquest home". En el darrer [enunciat], "l'autor de *Waverley*" té una ocurrència *primària*; en el primer, una [ocurrència] *secundària*.[3]

En altres paraules, un enunciat com ara (*i*), això és, una enunciat de la forma

---

1 *Ibid.*, 420-21.
2 *Ibid.*, 423.
3 *Ibid.*, 424.

$$G(S = (\iota x)Fx),$$

on G = Jordi IV volia saber si, F = escriví Waverley i S = Scott s'ha d'interpretar normalment com un enunciat del tipus (*i*)', això és, com un enunciat de la forma

$$G((\iota x)(Fx \wedge S = x)),$$

en el qual la descripció té una ocurrència *secundària*; però també es podria interpretar com un enunciat del tipus (*i*)'', això és, un enunciat de la forma

$$(\iota x)(Fx \wedge G(S = x)),$$

en el qual la descripció té una ocurrència *primària*. La diferència entre ambdós enunciats és evident, si hom té en compte la diferència en l'abast de la quantificació existèncial en les fórmules que hom obté a partir de la definició de descripció definida en un i altre enunciat. En el primer cas tenim, en efecte, un enunciat del tipus:

$$G(\exists x[Fx \ \wedge \forall y(Fy \rightarrow y = x) \wedge S = x]),$$

en el qual el quantificador existencial té un abast reduït, mentre que en el segon cas tenim un enunciat del tipus:

$$\exists x[Fx \ \wedge \forall y(Fy \rightarrow y = x)] \ \wedge G(S = x)],$$

en el qual el quantificador universal té com abast tot l'enunciat i, per tant, té un abast màxim. W. V. Quine, en el seu article "Quantifiers and Propositional Attitudes" (*1956*), va expressar gràficament amb els mots *quantifying within* i *quantifying into* la diferència entre un i l'altre tipus de quantificació:[1] en el primer enunciat tenim, en efecte, que el quantificador existencial cau dins de l'abast de l'actitud proposicional i, per tant, tenim una quantificació *en* el si d'una actitud proposicional, mentre que en el segon tipus d'enunciat tenim una quantificació *a través d'*una actitud proposicional, donat que encara que el quantificador cau fora de l'abast

[1] *Cf. Martinich 1996*, 331. Aquestes dues lectures o interpretacions de l'enunciat (*i*) s'anomenen a vegades lectura *de dicto* i *de re*, mentre que a les actituds proposicionals se les anomena sovint *clàusules-que* o *contextos intensionals*. Vegeu, per exemple, *Taylor 1998*, 192-201.

de l'actitud proposicional, una de les ocurrències de la variable que lliga cau en l'abast d'aquesta. Ara ja podem explicar com se soluciona l'enigma de la calvície de l'actual rei de França. Segons hem vist abans, ni l'enunciat

(*i*) "l'actual rei de França és calb",

ni l'enunciat

(*ii*) "l'actual rei de França no és calb",

són, d'acord amb la vella teoria de la denotació, vertaders; d'on es deduiria que la llei del terç exclòs no seria vàlida, si més no per als enunciats amb descripcions sense objecte. Ara bé, la distinció entre ocurrència primària i secundària d'una descripció permet solucionar l'enigma anterior i, "en general, [l'enigma] de l'estatus lògic de les frases denotatives que no denoten res".[1] En l'enunciat (*i*), en efecte, *l'actual rei de França* té una ocurrència secundària i és, per tant, fals. Car aquest enunciat és del tipus $(\iota x)(Fx \wedge Gx)$, és a dir, de la forma

$$\exists x[Fx \wedge \forall y(Fy \rightarrow y = x) \wedge Gx],$$

que és trivialment fals si no hi ha cap x amb la propietat F -en el nostre exemple, si no existeix l'actual rei de França, tal com s'esdevé. En canvi, l'enunciat (*ii*) és un enunciat ambigu, car es pot interpretar com un enunciat del tipus $(\iota x)(Fx \wedge \neg Gx)$, això és, com l'enunciat

"Hi ha una entitat que és ara rei de França i no és calba",

en el qual la descripció té una ocurrència *secundària*; o bé com un enunciat del tipus $\neg(\iota x)(Fx \wedge Gx)$, això és, com l'enunciat

"És fals que hi hagi una entitat que sigui ara el rei de França i sigui calba",

[1] *Russell 1994*, 424.

en el qual la descripció té una ocurrència *primària*. Doncs bé, l'enunciat "l'actual rei de França és calb" és en la primera interpretació clarament fals, mentre que en la segona interpretació és vertadera, car $(\iota x)(Fx \wedge Gx)$ és evidentment fals.

Finalment, la solució a l'enigma de com negar l'existència d'un objecte com ara la diferència entre A i B, quan A i B no difereixen, no té gran misteri:

> Si A i B difereixen, hi ha una i una sola entitat x tal que "x és la diferència entre A i B" és una proposició vertadera; si A i B no difereixen, no hi ha tal entitat x. Així, d'acord amb el significat de denotació abans explicat, "la diferència entre A i B" té una denotació quan A i B difereixen, però no altrament.[1]

Veiem, doncs, que la nova teoria de les descripcions suposa una ontologia més restringida que la de la vella teoria de la denotació de *Principles*, ja que permet rebutjar tots els objectes no existents -això és extensible a les entitats com Apol·lo, Hamlet, etc, car els noms propis que designen aquestes entitats es consideren, a partir d'ara, descripcions definides disfressades i, per tant, "frases denotatives que no denoten res".[2]

Les conseqüències de la nova teoria de les descripcions són d'índole diversa però, en qualsevol cas, d'una importància decisiva en el desenvolupament posterior del pensament del nostre autor. Hi ha en primer lloc una sèrie de consideracions força òbvies, però no per això menys importants, que cal tenir en compte. D'una banda, és evident que la nova teoria de les descripcions suposa l'entrada de Russell en l'òrbita de la moderna teoria de la quantificació, establerta per primera vegada per Frege en la seva *Begriffschrift*. Naturalment, l'anàlisi russelliana dels enunciats quantificacionals -*i.e* dels enunciats amb "tot", "cap" i "algun"- no té ni de bon troç ni la claredat ni el rigor de l'anàlisi fregeana. Essencialment, la diferència entre una i altra anàlisi rau en què l'anàlisi fregeana té com a punt de partida una definició clara i precisa de la noció de quantificador: *semànticament*, un quantificador -universal o particular- és un concepte de segon ordre, *sintàcticament* és un operador que *lliga* les variables que cauen en el seu *abast* o *domini*. Aquesta definició o alguna altra similar manca en l'anàlisi russelliana dels enunciats quantificacionals, tant a *Principles* com a "On Denoting", si bé és veritat que la definició dels enunciats universals a partir d'una funció proposicional "essent sempre vertadera" evoca clarament la definició semàntica fregeana i que la distinció entre ocurrència primària i secundària d'una descripció suposa la noció de

---

1 *Ibid.*, 425.

2 *Ibid.*, 425.

domini o abast, si més no per aquest tipus de quantificació -car, d'acord amb l'anàlisi russelliana, tota descripció és una quantificació. D'una altra banda, és igualment evident que el desenvolupament tècnic de la lògica quantificacional és en bona mesura independent del desenvolupament de la nova teoria de les descripcions, car el simbolisme de Peano permet Russell expressar els enunciats universal i particular mitjançant la noció de quantificador universal i existèncial i de funció proposicional -de la qual Russell en posseeix d'ençà *Principles* una "definició" precisa- i "marcar" d'una forma precisa l'abast de les ocurrències dels quantificadors, jugant en aquest sentit els "punts" un rol anàleg al que juguen avui en dia els parèntesis. A més, tal com hem explicat anteriorment, la introducció d'una simbologia específica per a les relacions i la possibilitat de quantificar sobre els seus elements, permet Russell expressar en el marc de la seva teoria quantificacional no només els enunciats quantificacionals de la lògica de predicats monàdica, sinó també tots els pertanyents a la lògica de predicats poliàdica (*Cf. supra*, § 1). ¿Quina necessitat hi havia, doncs, de desenvolupar tant la vella teoria de la denotació com la nova teoria de les descripcions? Deixant de banda, els temes relacionats amb la teoria de classes i, en especial, la necessitat de poder introduir en el discurs lògic les classes infinites, la vella teoria de la denotació s'introduïa, en primer lloc, per la necessitat d'explicar la naturalesa de la variable, que era "la noció característica de les matemàtiques", car aquesta explicació era "absoluta essencial a qualsevol teoria de les matemàtiques". Ara bé, era en termes de la frase denotativa "qualsevol terme" que Russell intentava explicar la variable i, en definitiva, la generalitat. En segon lloc, Russell volia donar raó mitjançant la vella teoria de la denotació del contingut informatiu dels enunciats que afirmaven una identitat, car només així podia explicar-se el rol de les definicions en matemàtiques, en les quals hi juguen un paper fonamental les descripcions definides. En definitiva, des del punt de vista russellià a *Principles*, la reducció de les matemàtiques a la lògica depenia de l'explicació de les expressions amb "qualsevol" i "el", per a les quals Russell havia introduït la relació de denotació. Ara bé, una vegada que Russell ha aconseguit reduir també els enunciats que contenen descripcions definides a proposicions de tipus quantificacionals -això és, a proposicions en les quals hi figuren només constants lògiques, quantificadors, funcions proposicionals i variables- i ha descobert que pot prescindir de la relació de denotació per a l'anàlisi d'aquests enunciats, només el restarà, o bé explicar la naturalesa de la variable prescindint de la relació de denotació, o bé considerar aquesta noció com a indefinible i renunciar a la seva explicació. Aquesta és exactament la situació que descriu Russell en el següent passatge d'"On Fundamentals", que segueix immediatament la primera formulació de la nova teoria de les descripcions:

> Sembla imperatiu trobar algun significat per x i ϕ'x i $C(x)$ i $C(\hat{x})$ que no ens dugui a les dificultats de la denotació. El punt interessant i curiós és que, reduint més i més la *denotació* [*denoting*] com hem estant fent, l'hem reduït a la sola noció de *qualsevol* [*any*], a partir de la qual havíem començat primerament. Aquesta noció sembla estar sempre pressuposada i incloure ella mateixa tota les dificultats en base a les quals hem refusat els altres conceptes denotatius. Així, ens resta la tasca d'elaborar *de novo* una teoria consistent de *qualsevol*, en la qual no s'empri la [relació de] denotació. El punt interessant que hem dilucidat més amunt és que *qualsevol* és genuïnament més fonamental que els altres conceptes denotatius; aquests poden ser explicats per aquell, però no aquell per aquests. I *qualsevol* ell mateix no és, en general, important, sinó només en la forma de *qualsevol cosa* [*anything*]. *Qualsevol cosa* sembla ser exactament el mateix que la *variable*. Quan diem *f'qualsevol cosa*, diem just el mateix que quan diem *f'x*. Podríem dir, per suposat, simplement que "qualsevol cosa" és una idea primitiva, si no fos pel fet que no podem aclarir-nos respecte de la relació del seu significat amb la seva denotació.[1]

Així, una vegada s'ha abandonat definitivament a "On Denoting" la distinció entre significat i denotació, degut precisament a les dificultats plantejades per la relació entre el significat d'una frase denotativa i llur denotació, Russell tindrà via lliure per adoptar l'última alternativa esmentada en el text anterior i afirmar que la noció de variable és *fonamental*, *i.e.* una noció primitiva i indefinible. No només això, sinó que a diferència de les altres nocions primitives d'"On Denoting", el quantificador universal i la funció proposicional, els quals són "definits" o, millor dit, explicats semànticament en diversos indrets de la seva obra, Russell renuncia definitivament a l'explicació de la naturalesa de la variable. En definitiva, Russell renuncia a l'explicació de la variable tan bon punt la seva anàlisi dels enunciats que contenen descripcions el permet interpretar-los sense recórrer a la relació de denotació. Des d'aquest moment, només el restarà rebutjar la distinció entre significat i denotació i assumir el cas rellevant per al qual la relació havia estat introduïda com irresoluble. Això explica, a més, l'èmfasi posat a "On Fundamentals" i "On Denoting" en la reducció dels enunciats que

---

[1] *Ibid.*, 387-88. Com veurem de seguida, la coma invertida indica que ens trobem davant d'una funció o relació descriptiva, però com que totes les funcions de les matemàtiques són d'aquesta mena, una expressió del tipus ϕ'x és, en definitiva, equivalent a la més habitual $\phi(x)$.

contenen descripcions definides, car aquests són en definitiva els únics que plantegen alguna dificultat a l'hora de reduir-los a proposicions de tipus quantificacional. Hi ha tanmateix una altra raó que explica aquest interès. La raó és que Russell, a diferència de Frege que definia els conceptes com un cas especial de funcions, defineix les funcions a partir de les funcions proposicionals -l'equivalent russellià dels conceptes fregeans. En altres paraules, per a Russell, la noció de funció proposicional és fonamental i a partir d'ella defineix tant a *Principles* com a *Principia Mathematica* la noció general de funció. Ara bé, per aquesta definició són necessàries les descripcions definides. Respecte a això, és interessant remarcar que, abans d'"On Denoting", Russell anomenava a les funcions en general *funcions denotatives*, perquè suposaven d'alguna forma la frase denotativa "l'entitat que fa la relació [funció] vertadera" però que, a partir d'aquest article, una vegada Russell ha aconseguit interpretar o analitzar els enunciats que contenen descripcions definides sense apel·lar a la relació de denotació, les anomenarà funcions descriptives. En efecte, tal com escriu Russell a *Principia*:

> Les funcions usuals de les matemàtiques com ara $x^2, \sin x, \log x$, no són proposicionals. Les funcions d'aquesta mena sempre signifiquen "el terme que té tal i tal relació amb y". Per aquesta raó podrien anomenar-se *funcions descriptives*, perquè *descriuen* un cert terme per mitjà de la seva relació amb llur argument. Així, $\sin \pi/2$ descriu el numero 1; amb tot, les proposicions en les quals figura $\sin \pi/2$ no són les mateixes que serien si $\sin \pi/2$ fos substituït per 1. Això queda clar pel fet que, per exemple, la proposició "$\sin \pi/2 = 1$" conté una informació valuosa, mentre que"$1 = 1$" és trivial. Les funcions descriptives, com les descripcions en general, no tenen significat per si mateixes, sinó només com a constituents de les proposicions.[1]

En concret, la definició general d'una funció descriptiva que Russell dóna a *Principia* és:

$$*30.01 \qquad R`y = (\iota x)(xRy), \qquad \text{Df}$$

on $R`y$ significa "el terme x que té la relació R amb y".[2] Això mostra, en definitiva, la influència de la teoria de les descripcions de 1905 en el desenvolupament de l'anàlisi lògica

[1] *Russell 1910*, 232.
[2] *Ibid.*, 232.

posterior. Assenyalem, per acabar, que l'anàlisi d'"On Denoting" trenca de soca-rel amb l'anàlisi de *Principles* basat en el principi del *paral·lelisme lògico-gramatical*, tot mostrant-nos que la forma lògica de les proposicions expressades per enunciats en els quals figuren expressions denotatives és completament diferent de la forma gramatical d'aquests -això és particularment evident en el cas dels enunciats en els quals figuren descripcions definides. Això durà, d'una banda, a destacar la rellevància de la noció de *símbol incomplet* i de les *definicions contextuals*, que tindran una importància cabdal en la formació de la idea de una *teoria sense classes* i en la solució de les paradoxes. Aquest és precisament el tema que ens ocuparà a partir d'ara. I, d'una altra banda, a una nova actitud envers el llenguatge, que deixarà de ser el mitjà transparent que havia estat d'ençà *Principles*, i, en definitiva, a una nova concepció de l'*anàlisi filosòfica.*

9. La idea d'una teoria sense classes i el principi del cercle viciós

Russell retorna al problema de les contradiccions en l'article "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types" (*1905$_c$*), centrant-se en aquelles sorgides en l'àmbit de la teoria dels nombres transfinits i deixant de banda altres paradoxes com, per exemple, la paradoxa relativa a la noció de proposició -això és bastant sorprenent si tenim en compte que aquesta és precisament l'única paradoxa que la doctrina de tipus de *Principles* era incapaç de resoldre. Aquestes contradiccions són essencialment la paradoxa de Cantor i la de Burali-Forti, que fan referència respectivament a les nocions de nombre cardinal i ordinal. Ja hem explicat anteriorment la primera paradoxa i hem vist com, a partir de la seva anàlisi, Russell derivava la seva famosa paradoxa, relativa a la noció de classe (*Cf. supra*, § 7). La segona paradoxa l'enuncia Russell en l'article abans esmentat en els termes següents:

> Si *u* és un segment qualsevol de la sèrie d'ordinals ordenada per la seva magnitud, el nombre ordinal de *u* és més gran que qualsevol membre de *u* i és, de fet, l'immediat successor de *u* (*i.e.* el límit, si *u* no té últim terme, o el successor immediat del darrer terme, si *u* té darrer terme). El nombre ordinal de *u* és sempre un nombre ordinal, i no és mai un membre de *u*. Però, considerem ara la sèrie sencera dels nombres ordinals, la qual és ben ordenada i, per tant, hauria de tenir un nombre

> ordinal. Aquest ha de ser un nombre ordinal i, amb tot, ha de ser més gran que qualsevol nombre ordinal. D'aquí que sigui i no sigui alhora un nombre ordinal, la qual cosa és una contradicció.[1]

En efecte, com és ben sabut, donat un nombre ordinal α, l'ordinal de la classe dels nombres ordinals menors o iguals a α, és $\alpha + 1$. D'aquí que *si* Ω és l'ordinal de la classe de tots els nombres ordinals llavors, donat que l'ordinal de la classe dels nombres ordinals menors o iguals a Ω és $\Omega + 1$, Ω *no* sigui l'ordinal de la classe de tots els ordinals. Doncs bé, de la mateixa manera que l'anàlisi russelliana de la paradoxa de Cantor havia conduït a la paradoxa relativa a la noció de classe, despullant aquella de tota aparença aritmètica, l'anàlisi de la paradoxa de Burali-Forti durà al descobriment de la forma general, comuna, a totes les contradiccions, que Russell enuncia en els termes següents:

> Donada una propietat ϕ i una funció f, tals que, si ϕ pertany a tots els membres de u, $f‘u$ sempre existeix, té la propietat ϕ i no és un membre de u, llavors la suposició que hi ha una classe w de tots els termes que tenen la propietat ϕ i que $f‘w$ existeix, duu a la conclusió que $f‘w$ té i no té la propietat ϕ.[2]

Així, per exemple, en la paradoxa de Burali-Forti $\phi!x$ serà la propietat "x és un nombre ordinal" i $f‘u$ la funció "el nombre ordinal de u"; en la paradoxa de Russell, $\phi!x$ serà la propietat "x no és membre de si mateix" i $f‘u$ serà la mateixa classe u. De l'anàlisi anterior se'n segueixen dues conseqüències fonamentals. La primera és que "les contradiccions que dominen la teoria del transfinit [...] pertanyen totes elles a un cert tipus definit [...] [i] que cap d'elles no és essencialment aritmètica, sinó que totes pertanyen a la lògica i, per tant, han de solucionar-se mitjançant algun canvi en les suposicions lògiques habituals".[3] D'acord amb això, Russell proposarà "tres direccions diferents a través de les quals podria intentar-se un canvi d'aquesta mena", a saber, la *teoria zig-zag* [*zigzag theory*], la *teoria de limitació de la mida* de les classes [*theory of limitation of size*] i la *teoria sense classes* [*no classes theory*]. La segona conseqüència és evidentment que "una funció proposicional no determina sempre

1 *Russell 1905$_c$*, 34.

2 *Ibid.*, 35. Com veurem de seguida, en l'article que estem comentant, Russell indica el fet que la variable x té la *propietat* ϕ mitjançant l'expressió $\phi!x$, la qual indica ambiguament una *funció proposicional* de x. Per contra, com ja sabem, la notació $f‘u$ indica una *funció descriptiva* de u.

3 *Ibid.*, 37.

una classe".[1] La descripció anterior de la forma general de les antinòmies apunta, en efecte, a l'existència del que Russell anomena *processos* o *classes autoreproductives*, això és, a que

> Hi ha certes propietats mitjançant les quals, donada una classe qualsevol de termes que tinguin tots ells una propietat d'aquesta mena, podem definir sempre un nou terme que tingui la propietat en qüestió. D'aquí que no puguem recollir sempre tots els termes que tenen aquesta propietat en un *tot* [*whole*], perquè sempre que confiem tenir-los tots, la col·lecció que tenim procedeix immediatament a generar un nou terme que té també aquesta propietat.[2]

Aquestes consideracions semblen suggerir-nos naturalment dues possibilitats per atacar el problema de les paradoxes que coincideixen amb les dues primeres direccions abans esmentades: Una possibilitat seria, en efecte, assumir que "les funcions proposicionals determinen classes quan són clarament simples i només deixen de fer-ho quan són complicades i recòndites"[3] (teoria *zig-zag*). Una altra possibilitat seria, en canvi, assumir que "hi ha d'haver (per dir-ho així) un cert límit de mida que cap classe pot assolir; i qualsevol pretesa classe que assoleixi o sobrepassi aquest límit és una classe impròpia, *i.e.* una no-entitat"[4] (teoria de la *limitació de la mida*). Com ja sabem, la teoria *zig-zag* havia estat ja esbossada per Russell a *Principles*, en suggerir que les funcions *quadràtiques* (ara anomenades *no predicatives*) no determinen mai una classe i caracteritzar aquestes com funcions d'un tipus determinat. La idea de la teoria *zig-zag* -que centrarà, en les seves diferents versions, bona part dels esforços de Russell de 1904 adreçats a la solució de les paradoxes- és establir a través d'un conjunt d'axiomes una sèrie de condicions que determinin quan una expressió funcional que contingui dues ocurrències d'una mateixa variable -recordem que aquest és el cas de les funcions *quadràtiques*- és reductible o equivalent a una expressió que contingui només una variable. D'aquesta manera és determinaran quines funcions determinen classes per poder així excloure les que no ho fan. Però tal com Russell reconeixeria en una lletra de 15 de Març de 1906 a P. B. Jourdain: "No vaig assolir mai un conjunt de proposicions primitives que funcionés realment, i tots els conjunts eren horriblement complicats i poc obvis".[5] Tanmateix, com veurem més endavant,

---

1 *Ibid.*, 37.
2 *Ibid.*, 36.
3 *Ibid.*, 38.
4 *Ibid.*, 43.
5 *Grattan-Guinness 1977*, 79.

aquesta mateixa idea serà la que durà, un cop elaborada la teoria de les descripcions de 1905, a la teoria substitucional de 1906. Assenyalem també que aquesta idea serà represa i reelaborada alguns anys més tard per Quine en el sistema lògic de "New Foundations for Mathematical Logic" (*1936)* -l'anomenada *teoria de l'estratificació*. Respecte a la teoria de la *limitació de la mida*, remarquem amb Gödel que:

> La teoria axiomàtica de conjunts, tal com va ser desenvolupada més tard per Zermelo i altres, pot considerar-se com una elaboració d'aquesta idea pel que fa a les classes. En particular, la frase "no massa gran" pot especificar-se (com mostrà J. von Neumann) de manera que signifiqui "no equivalent a l'univers de totes les coses" o, per ser més exactes, de manera que pugui assumir-se que una funció determina una classe quan i només quan no existeix cap relació (en intensió, *i.e.* una funció proposicional amb dues variables) que associï de forma biunívoca a cada objecte, un objecte que satisfaci la funció proposicional i viceversa.[1]

Les raons per les quals Russell no va desenvolupar mai aquesta idea s'explicaran en la darrer secció d'aquest capítol. En qualsevol cas, a partir de 1906 Russell deixarà de banda aquestes dues teories i s'inclinarà definitivament per la tercera, la *no classes theory* que, com diu el mateix nom, "es basa simplement en l'abstinència d'una suposició dubtosa",[2] a saber, la referent a l'existència de classes. Com veurem més endavant, la importància de la idea d'una teoria sense classes rau en què Russell va concebre tant la *teoria substitucional* de 1906 com les versions de 1908 i 1910 de la *teoria de tipus* com a diferents realitzacions seves, per la qual cosa l'estudi d'aquestes requereix una explicació prèvia d'aquella. Com comprovarem tot seguit, la idea d'una teoria sense classes té el seu origen en la teoria de les descripcions de 1905 i respon a una certa anàlisi de les paradoxes segons la qual l'origen d'aquestes es trobaria indefectiblement en alguna mena de cercle viciós. Així, en la introducció a "Les paradoxes de la logique" (*1906*$_c$), a propòsit de la solució proposada per Poincaré al problema de les paradoxes en l'article "Les mathematiques et la logique" (*1905*, *1906*), Russell assenyala el següent:

> M. Poincaré creu que totes aquestes paradoxes provenen d'una espècie de cercle viciós, i en això estic d'acord amb ell. Però ell no veu pas la dificultat que hi ha

1 *Gödel 1990*, 125.
2 *Russell 1905*$_c$, 45.

en evitar un cercle viciós d'aquesta mena. Intentaré mostrar que, si hom el vol evitar, ha d'adoptar una teoria anàloga a la meva "no-classes theory"; de fet, és amb aquesta finalitat que l'he inventat.[1]

Com és ben sabut, en efecte, Richard havia exposat l'any 1905 la famosa paradoxa que duu el seu nom i que podem exposar de forma simplificada en els següents termes: Sigui *E* el conjunt de tots els nombres definibles mitjançant un nombre finit de paraules i sigui *N* el nombre definit pel grup *G* de paraules següents: "Sigui *p* el *n*-èsim decimal del nombre *n*-èsim del conjunt *E*; formem aleshores un nombre que tingui zero com a part sencera i, com a decimal *n*-èsim, $p+1$ si *p* no és igual a 8 o 9 i la unitat en cas contrari." Així, *N* és distint de cada element de *E* i, per tant, no pertany a *E*. Però, d'altra banda, *N* ha estat definit mitjançant un nombre finit de paraules i, doncs, pertany a *E*. En el mateix article, Richard donava la solució a la paradoxa assenyalant que "el grup *G* no té sentit més que si el conjunt *E* està totalment definit, i no ho està si no és per un nombre infinit de mots".[2] En definitiva, la definició de *N* suposa la definició prèvia de *E*, la qual requereix un nombre infinit de mots i, per tant, la definició de *N* requeriria també un nombre infinit de mots. Així, conclou Richard, *N* no pertany a *E*. La solució anterior fou acceptada per Poincaré, el qual la reformulà en uns termes un mica diferents:

> *E* és el conjunt de tots els nombres que hom pot definir per un nombre finit de mots sense introduir la noció del mateix conjunt *E*. Sense això, la definició de *E* contindria un cercle viciós. Hom no pot definir *E* a partir del mateix conjunt *E*. Però nosaltres hem definit *N*, bé és veritat que en un nombre finit de paraules, però recolzant-nos en la noció de *E*. I és per això que *N* no pot formar part de *E*.[3]

I, afegia Poincaré, "la mateixa solució val per les altres antinòmies". En altres paraules, segons Poincaré, les paradoxes apareixen només quan definim un conjunt de forma circular, això és, quan el conjunt que hom defineix ocorre no només en el *definiens*, sinó també en el *definiendum* de la definició en qüestió. Russell està d'acord amb Poincaré en què totes les paradoxes provenen d'alguna mena de cercle viciós i, de fet, aquesta idea -contra el que s'ha afirmat sovint- ja és present en els manuscrits russellians de 1904.[4] Però discrepa

1 *Russell* 1906_c, 627.
2 *Richard 1905*, 541.
3 *Poincaré 1906*, 305, 307.
4 Per exemple, en l'article "On Functions, Classes and Relations" (*1904*), Russell afirma que

amb ell respecte a la manera d'evitar-los. En efecte, assenyala Russell, "els cercles viciosos tenen això de particular: que hom no els pot pas evitar observant simplement que els ha comès; car l'afirmació que han de ser evitats (si no va acompanyada d'una refosa dels principis lògics) suposa ella mateixa un dels cercles que prescriu evitar".[1] Un clar exemple d'això és la manera com Poincaré proposa evitar el cercle viciós comès en la paradoxa de Richard, a saber, definint E com "el conjunt de tots els nombres definibles per un nombre finit de mots sense introduir la noció del mateix conjunt E". Car aquesta definició, observa Russell, és circular i hom cau, doncs, en allò que ella prescrivia que s'havia d'evitar, això és, en un cercle viciós. En definitiva, assenyala Russell, si hom vol evitar els cercles viciosos que són a l'origen de les paradoxes, no n'hi ha prou amb una solució *à la Poincaré*, sinó que "cal recórrer de totes totes a una reforma aprofundida dels principis lògics, més o menys anàloga a la meva teoria "sense classes"".[2] Essencialment, la idea d'una teoria sense classes consisteix a analitzar els enunciats referents a classes com enunciats quantificacionals d'un cert tipus, de manera que els enunciats referents a classes contradictòries esdevinguin enunciats mal formats, això és, enunciats sense sentit. Segons Russell, en efecte,

> La tesi de la teoria sense classes és que totes les proposicions significants referents a classes poden ser considerades com a proposicions referents a tots o alguns de llurs membres, és a dir, [tots o alguns] dels membres que satisfan alguna funció proposicional φx. [Car] me n'he adonat que les úniques proposicions referents a classes que no poden ser considerades així són les proposicions del tipus que dóna lloc a les contradiccions. És natural suposar, doncs, que les classes són simplement abreujaments lingüístics o simbòlics.[3]

Per exemple, assenyala Russell, un enunciat com ara "Els homes són mortals", que s'interpretava a *Principles* com una proposició referent a la classe dels homes, s'analitzarà ara com equivalent a l'enunciat "Tots els homes són mortals", és a dir, com un enunciat que expressa una proposició del tipus (en notació moderna):

$$\forall x(\varphi x \rightarrow \phi x),$$

les paradoxes sorgeixen a partir de definicions que contenen un cercle viciós (*Cf. Russell 1994*, 88) És precisament aquesta idea de "cercle viciós en la definició" la que és a l'origen del principi del cercle viciós (*PCV*) que estudiarem més endavant.

1 *Russell 1906$_c$*, 648.

2 *Ibid.*, 633.

3 *Ibid.*, 636.

en la qual no hi ha evidentment cap referència a la classe dels homes. D'aquesta manera, els enunciats que contenen símbols de classe són analitzats com enunciats de tipus quantificacional, amb la qual cosa aquests símbols hauran de ser considerats com "expressions purament verbals o simbòliques dels judicis, i no com a parts dels fets expressats per aquests judicis".[1] En altres paraules, els símbols de classes hauran de ser considerats com *símbols* o *expressions incompletes*, que no tenen significat per si soles, és a dir, com meres *façons de parler*. Consegüentment, hom haurà d'abstenir-se de suposar que aquests símbols representin classes i considerar que aquestes són simples *ficcions lògiques*. D'una altra banda, tal com reconeix Russell al final de "Les paradoxes de la logique", l'anàlisi anterior dels enunciats que contenen símbols de classe "és una extensió del mètode aplicat a les frases denotatives en el meu article "On Denoting"".[2] De fet, la idea de considerar els símbols de classes com a símbols incomplets es remunta al manuscrit "On Fundamentals", on una vegada definides contextualment les descripcions definides, Russell defineix -o elimina, Quine *dixit*- contextualment les classes mitjançant les dues proposicions primitives següents:

$$\vdash \cdot(\phi) : (\exists u) \cdot uKl\phi \qquad \text{Pp}$$
$$\vdash : u\mathrm{Kl}\phi \cdot v\mathrm{Kl}\phi \cdot\supset_{u,v} \cdot u = v, \quad \text{Pp}$$

on $uKl\phi$ es llegeix "u és la classe determinada per ϕ" i definint llavors:

$$f`(\dot{z}\,(\phi`z)) \cdot = \cdot(\exists u) \cdot u\mathrm{Kl}\phi \cdot f`u \quad \text{Df}$$

i

$$x\ \varepsilon\ u \cdot = \cdot(\exists \phi) \cdot u\mathrm{Kl}\phi \cdot \phi`x, \qquad \text{Df}$$

amb la qual cosa podem definir llavors $u = v$ de la forma habitual.[3] Tal com assenyala Russell a "On Fundamentals", "la teoria anterior porta al resultat que totes les funcions denotatives no tenen significat per si mateixes i que només són significants quan figuren com a

[1] *Ibid.*, 649.
[2] *Ibid.*, 649, n. 1.
[3] *Cf. Russell 1994*, 384.

constituents de les proposicions".[1] La importància de les definicions contextuals de les diferents frases denotatives rau, en efecte, en què permet construir una teoria que contingui expressions d'aquesta mena sense haver d'acceptar les seves denotacions. Així, tal com hem vist en la secció anterior, la teoria de les descripcions d'"On Denoting" permet explicar el valor semàntic dels enunciats que contenen descripcions definides, sense haver d'assumir la denotació d'aquestes -la qual cosa és especialment important per donar raó dels enunciats com ara "El rei de França és calb". Anàlogament, la idea d'una teoria sense classes serà construir un sistema lògic en el qual hom pugui expressar tots els axiomes i teoremes de la teoria de classes sense haver d'assumir l'existència d'aquestes. En definitiva, les consideracions anteriors confirmen que la idea d'una teoria sense classes és una conseqüència directa del descobriment de la nova teoria de les descripcions. No debades, Russell explicarà més endavant a *The Autobiography of Bertrand Russell* (*1967-69*), que aquest descobriment "representà el primer pas envers la solució de les dificultats que des de feia tant de temps m'havien desconcertat",[2] això és, de les contradiccions. Ara bé, tal com s'ha esmentat abans, si la teoria sense classes ha de solucionar les contradiccions, haurà de ser una teoria que sigui capaç d'evitar que es produeixin els cercles viciosos que l'originen. De fet, la mateixa noció russelliana de cercle viciós de "Les paradoxes de la logique" només rep un significat precís en el marc de la teoria sense classes. Segons Russell, en efecte:

> Els cercles viciosos apareixen quan una frase que conté les expressions *tot* o *algun* (això és, que conté una variable aparent) sembla representar un dels objectes als quals s'aplica l'expressió *tot* o *algun*.[3]

Així, per evitar els cercles viciosos, caldrà observar el principi següent:

"Tot allò que conté una frase denotativa amb *tot* o *algun* no ha de ser un dels objectes denotats per aquesta frase denotativa"

o, equivalentment:

---

[1] *Ibid.*, 384.
[2] *Russell 1967-69 1*, 152.
[3] *Russell 1906$_c$*, 649.

"Tot allò que conté una variable aparent no ha de ser ell mateix un dels valors possibles d'aquesta variable".

Russell reservarà a "Les paradoxes de la logique" el nom de *principi del cercle viciós* (*PCV*) a aquesta última formulació,[1] la qual conservarà literalment en el seu conegut article de 1908 sobre la teoria de tipus. Tant la comprensió de la noció de cercle viciós com la del *PCV* en relació a la paradoxa de classes no té cap dificultat si recordem que, d'acord amb la *teoria sense classes*, els enunciats referents a classes s'han d'analitzar com enunciats referents a *tots* o *alguns* dels membres d'aquestes, és a dir, com enunciats del tipus $\forall x\varphi x$ i $\exists x\varphi x$, els quals es caracteritzen òbviament pel fet de contenir variables *aparents* o *lligades*. Considerem, per exemple, la *paradoxa de Russell*, això és, sigui:

$$w = \{x : \mathrm{cls}(x) \wedge x \notin x\},$$

tenim així que:

$$(x) : x \in w \cdot \equiv \cdot \mathrm{cls}(x) \wedge x \notin x.$$

Aquesta fórmula defineix la classe w.[2] Ara bé, és evident que aquesta definició conté un cercle viciós en la mesura en què w és un dels valors possibles de x i, per tant, pot substituir-se per x en el *definiendum*. En aquestes circumstàncies, doncs, la classe w genera immediatament una contradicció. La solució que haurà de fornir llavors qualsevol teoria sense classes haurà de consistir a evitar que les anteriors circumstàncies puguin donar-se, és a dir, evitar que una classe pugi definir-se a través d'una fórmula que conté una variable aparent el rang o domini de la qual abasta aquesta mateixa classe. I això és precisament el que prescriu el *PCV*. Tanmateix, la cosa no és tan senzilla com podria semblar a primera vista, car el *PCV* no s'aplica exclusivament a les classes, sinó a "tot allò que conté una variable aparent" o, si volem, "a tota expressió que conté una variable aparent" i, segons Russell, aquestes comprenen no només les (expressions de) classes i relacions, sinó també les

---

1 *Cf. ibid.*, 634 i 640.

2 Aquesta fórmula no és més que el primer pas del que hauria de ser una definició de la classe w en el marc d'una teoria sense classes. Per això, hauríem d'eliminar cls(x) i la relació de pertinença d'acord amb les definicions contextuals que, tal com hem vist abans, Russell donava a "On Fundamentas". Més endavant veurem també com es duu a terme aquesta eliminació a *Principia Mathematica* (*Cf. infra*, § 13)

descripcions definides i les proposicions generals.[1] Prou significativament, en aquesta llista no hi apareixen les funcions proposicionals, a les quals s'aplicarà preeminentment una nova i ampliada versió del *PCV* en les versions de la teoria de tipus de 1908 i 1910, però això es degut al fet que a "Les paradoxes de la logique" Russell considera que pot prescindir dels símbols de funció i substituir-los per les anomenades *matrius* -aquesta és la idea de la teoria substitucional que explicarem en la secció següent -en canvi, en l'article "Mathematical Logic as based on the Theory of Types" de 1908 i sobretot en el primer volum de *Principia Mathematica* de 1910, es recuperen les funcions proposicionals -juntament amb els individuals- com les úniques entitats de ple dret i conseqüentment el *PCV* s'aplicarà essencialment a elles. D'altra banda, tal com observa Russell a "Les paradoxes de la logique", el *PCV* és un principi purament negatiu, que "no és per ell mateix la solució de les paradoxes de cercle viciós, sinó només la conseqüència que una teoria ha de fornir per aportar una solució".[2] Per tant, continua Russell, "cal construir una teoria de les expressions que continguin variables aparents que tingui com a conseqüència el principi del cercle viciós".[3] El problema de construir una teoria d'aquesta mena rau en què el *PCV* sembla, si més no a primera vista, incompatible amb la *teoria de la variable universal*. En efecte, si, com postula el *PCV*, els objectes que contenen una variable aparent no poden ser ells mateixos un dels valors d'aquesta variable, llavors el rang d'aquesta variable no podrà comprendre tots els objectes. Així, qualsevol sistema lògic que tingués com a conseqüència el *PCV* hauria de tenir diferents tipus de variables -individuals, funcionals, etc-. Es tractaria, doncs, d'un sistema lògic essencialment anàleg a la doctrina de tipus de *Principles*. Però, com ja hem explicat manta vegada, la teoria de la variable universal és a la base de la concepció russelliana d'una lògica universal[4] i de la reducció de les matemàtiques a la lògica des del punt de vista logicista defensat per Russell. Així, l'exigència d'universalitat imposada ja per Russell a *Principles*, la qual explica la seva insatisfacció amb la doctrina de tipus formulada en l'Apèndix *B*-, roman intacta a "Les paradoxes de la logique": Una variable,

---

[1] Hem mantingut l'ambigüitat típicament russelliana entre el nivell lingüístic i el nivell lògic pròpiament dit, però s'ha de recordar que Russell entén les variables -reals o aparents- en un sentit extralingüístic i, per tant, la llista anterior a la qual fa referència el *PCV* cal entendre-la fonamentalment com una llista d'objecte o entitats lògiques.

[2] *Ibid.*, 641.

[3] *Ibid.*, 641.

[4] Així, Russell deriva a "Les paradoxes de la logique" la teoria de la variable universal a partir del fet que en lògica hom ha de poder expressar qualsevol proposició i, en particular, la proposició "φx només és significant si x és una classe", la qual només té sentit si x no està restringida a classes, és a dir, si x és universal (*Cf. Russell 1906$_c$*, 641).

insisteix Russell, "ha de ser capaç de [prendre] tots els valors".[1] Ara bé, ¿és possible construir una lògica que satisfaci la doble exigència de tenir com a conseqüència el *PCV* i satisfer la teoria de la variable universal? Russell respon afirmativament aquesta pregunta en els termes següents:

> Per conciliar el domini il·limitat de la variable amb el principi de cercle viciós, la qual cosa podria semblar a primera vista impossible, cal construir una teoria on tota expressió que contingui una variable aparent (és a dir, que contingui els mots *tots*, *algun*, *un qualsevol* i *el*) sigui reconeguda simplement com una manera de parlar, una cosa que no tindrà més realitat independent que, per exemple, $\frac{d}{dx}$ o $\int_a^b$. Car en aquest cas, si φx és vertadera per a tot valor de x, quan substituïm x per una expressió que contingui una variable aparent, ella no serà vertadera sinó no significant. Ara bé, aquestes expressions comprenen totes les frases descriptives (*el* això o allò), totes les classes, totes les relacions en extensió i totes les proposicions *generals*, és a dir, de la forma "φx és vertadera per tots (o alguns) valors de x".[2]

En altres paraules, perquè una lògica satisfaci la doble exigència abans esmentada, caldrà, en primer lloc, restringir el rang de les variables als individus i considerar aquests com les úniques entitats vertaderes, tot definint contextualment la resta d'entitats -classes, relacions, proposicions, ...-, de manera que aquestes darrers (*i*) esdevinguin meres ficcions lògiques i (*ii*) la substitució d'un dels símbols incomplets mitjançant els quals hem introduït aquestes entitats per una variable individual esdevingui un absurd, una expressió sense significat. Com veurem en la secció següent, això és el que farà en bona mesura la teoria substitucional -si més no, la seva versió més sofisticada-, amb la qual cosa aquesta teoria serà no només una teoria sense classes, sinó sense cap mena d'objecte que contingui una variable aparent.

---

1 *Ibid.*, 641.

2 *Ibid.*, 642.

10. La teoria substitucional

Russell exposa la teoria substitucional a "Les paradoxes de la logique". De fet, en aquest article trobem dues versions d'aquesta teoria: la primera és exposada en la segona part d'aquest article només a manera de recordatori. Aquesta teoria, en efecte, havia estat esbossada ja en l'article "The Theory of Transfinite Numbers and Order Types" i exposada amb tot luxe de detalls en una conferència titulada "On the substitutional Theory of Classes and Relations" (*1906$_b$*), llegida davant la *London Mathematical Society*. Però, la constatació que aquesta teoria era vulnerable a les paradoxes va fer que Russell renunciés a la publicació del text d'aquesta conferència i proposés una segona versió de la teoria, que exposa en la tercera part de "Les paradoxes de la logique". Tanmateix, aquesta teoria ja no presentarà per Russell els mateixos atractius que la primera, per la qual cosa l'abandonarà i substituirà a l'article "Mathematical Logic as based on the Theory of Types" (*1908*) per la *teoria de tipus* -encara que en aquest article trobem de bell nou aquesta teoria exposada com una mera possibilitat teòrica. D'acord amb l'article de P. Hylton "Russell's Substitutional Theory" (*1980)* anomenarem a aquestes teories *teoria substitucional simple* (*TSS*) i *teoria substitucional ramificada* (*TSR*) respectivament, per la seva analogia amb la teoria de tipus simple (*TTS*) i la teoria de tipus ramificada (*TTR*).

Essencialment, la idea de *TSS* és analitzar els enunciats que contenen símbols complets referents a classes i relacions -en intensió i extensió-, com enunciats en els quals aquests símbols han estat reemplaçats per uns símbols incomplets que Russell anomena *matrius*. Una matriu és de forma paradigmàtica un símbol del tipus p/a, mitjançant el qual s'expressa la substituïbilitat en la proposició p del seu subjecte lògic a per una entitat qualsevol i que podrà ser emprat llavors en comptes d'un símbol de funció $f\hat{x}$ o d'un símbol de la classe determinada per aquesta funció. Les característiques essencials de les matrius són que (*i*) no tenen cap significat per si soles, sinó que només adquireixen significat a través de determinades definicions contextuals, les quals permeten a Russell operar amb elles com si de classes o relacions es tractés i (*ii*) formen una jerarquia de tipus completament anàloga a la jerarquia habitual de classes i relacions de la teoria de tipus. Per mor d'això, les definicions contextuals de les matrius i, en general, els enunciats en què els símbols de classes i relacions hagin estat reemplaçats per matrius, només tindran significat si aquests símbols estan subjectes a certs condicionants tipològics, els quals seran anàlegs als condicionants als quals estarien sotmeses les classes i relacions en la teoria de tipus per tal que les definicions o enunciats corresponents fossin significatius. La conseqüència d'això és evidentment que quan l'anàlisi d'un enunciat de la teoria de classes o relacions dugui a un enunciat de *TSS* mancat de significat, llavors hom podrà declarar també l'enunciat de partida com a mancat de significat -i viceversa. D'aquesta manera, *TSS* solucionarà les paradoxes conjuntistes sense haver de suposar una jerarquia de classes i relacions a la manera de la doctrina de tipus de *Principles*, sinó suposant simplement una jerarquia de matrius, és a dir, una jerarquia de ficcions lògiques.

Abans d'entrar en els detalls tècnics que determinen el desenvolupament de *TSS*, voldríem fer-nos ressò de les raons que dugueren Russell a formular *TSS* com a realització de la idea d'una teoria sense classes, car aquestes raons ens ajudaran a entendre no només el significat de la teoria substitucional en el desenvolupament de la lògica russelliana, sinó també el de les diferents versions de la teoria de tipus posteriors a ella. Respecte a això, cal remarcar primer de tot que, tal com hem explicat al començament de la secció anterior, durant l'any 1905 Russell centrà la seva atenció en les paradoxes sorgides en l'àmbit de la teoria cantoriana de conjunts, oblidant-se de la paradoxa relativa a la noció de proposició descoberta a *Principles* i que mostrava ja la insuficiència de la doctrina de tipus exposada en l'Apèndix B d'aquesta obra. Això determinà sens dubte l'estratègia seguida per Russell l'any 1906 de resoldre les paradoxes a través d'una teoria sense *classes* i *relacions* en extensió i intensió, però amb *proposicions*. En aquest sentit, *TSS* no fa sinó desplegar aquesta estratègia: en substituir-se els símbols complets que fan referència a classes o relacions -en intensió o extensió- per símbols en els quals figuren només proposicions i els seus constituents, s'elimina del discurs lògic tota referència a les entitats l'existència de les quals era posada en dubte per les paradoxes conjuntistes -funcions proposicionals, classes i relacions- i s'assumeix només l'existència d'aquelles entitats que no es veien afectades per aquestes paradoxes: els individus i les proposicions.

Hi ha tanmateix altres raons que ajuden a entendre perquè Russell proposà *TSS* com a realització de la idea d'una teoria sense classes i com a solució de les paradoxes. Es tracta concretament de la centralitat que les nocions de proposició i variable tenen en la lògica de Russell i, molt particularment, la teoria de la variable universal. La noció de proposició és, d'ençà els primers escrits de Russell, la noció fonamental de la lògica russelliana -una de les raons d'això és la influència i mestratge de G. E. Moore. Aquesta rellevància de la noció de proposició és ben palesa a *Principles* i en els escrits immediatament posteriors i ha estat comentada ja en diverses ocasions. La noció de variable té també una notable rellevància a *Principles*, sobretot en relació a la reducció de les matemàtiques a la lògica. Però la seva consideració com una noció fonamental i indefinible de l'anàlisi lògica és conseqüència de la nova teoria de les descripcions. L'èmfasi posat a partir d'"On Fundamentals" i "On Denoting" en la noció de variable no és, d'altra banda, incompatible amb la centralitat de la noció de proposició esmentada abans. Car la noció de variable no és per a Russell una noció *lingüística* -i, encara menys, *metalingüística*- sinó *extralingüística* com les mateixes proposicions.[1] La relació de la noció de proposició amb la de variable es dóna a través de la noció de funció proposicional. Més exactament, cada funció proposicional està en relació amb un nombre determinat de proposicions, a saber, aquelles que hom obté assignant un valor a cada una de les variables que ocorren en la funció proposicional (*Cf. supra*, § 7). De fet, per a Russell, el *valor* d'una funció proposicional per una determinada assignació de valors als seus arguments és una proposició, no un valor de veritat (Frege). Aquesta relació fonamental entre proposicions i funcions proposicionals era precisament la que permetia Russell explicar a *Principles* les darrers a partir de les primeres. Segons Russell, en efecte:

> En qualsevol proposició [...] podríem imaginar un dels termes, que no sigui un verb o adjectiu, com a reemplaçable per altres termes, en lloc de "Sòcrates és un home" podríem posar "Plató és un home", "el nombre 2 és un home" i així successivament. Així obtenim successives proposicions coincidents en tot llevat del terme variable. Posant *x* pel terme variable, "*x* és un home" expressa el tipus de totes les proposicions d'aquesta mena.[2]

Veiem, doncs, que la idea de introduir les funcions proposicionals -i a partir de la nova teoria de les descripcions totes les funcions són casos especials de funcions proposicionals- a partir de la noció de proposició i substitució d'un dels seus constituents per una variable, és a dir, la idea bàsica de *TSS*, es remunta a *Principles*. I, si bé és cert que Russell havia considerat tant a *Principles* com a "On Denoting" la noció de funció proposicional com a fonamental i indefinible, no és menys cert que la paradoxa descoberta per Russell posava en dubte precisament aquesta mena d'entitats, amb la qual cosa s'obria la porta al seu foragitament del discurs lògic. Això és important i està relacionat, com veurem

---

1 Aquest punt de vista se segueix immediatament de les explicacions que Russell dóna de la variable, tant a *Principles* com en els articles "On Fundamentals" i "On Denoting" (*Cf. supra*, § 5 i § 8 respectivament).

2 *Russell 1903*, § 22, 20. Citat ja parcialment (*Cf. supra*, § 3).

tot seguit, amb l'exigència d'una variable universal o no restringida. Recordem, en efecte, que Russell havia formulat la seva famosa paradoxa en la correspondència amb Frege indistintament en termes de classes i predicats (*Cf. supra*, cap. V, § 10) i que a *Principles* l'havia formulat de forma anàloga en termes de classe i funcions proposicionals (*Cf. supra*, § 7). Russell considerava les formulacions de tipus extensional i intensional com equivalents, donat l'axioma de la teoria de classes segons el qual tota funció proposicional determina una classe i viceversa, per la qual cosa buscà la solució a la paradoxa tant des del costat extensional -la doctrina de tipus de *Principles* i la teoria de limitació de la mida de "The Theory of Transfinite Numbers and Order Types"- com pel costat intensional -la teoria *zig-zag* esbossada en diversos manuscrits de 1904 i en aquest mateix article. Doncs bé, tal com veurem a continuació, la teoria substitucional -malgrat ser una teoria sense classes- s'origina en aquesta última via de resolució de les paradoxes i, més en concret, en la vella idea d'eliminar les variables funcionals que ja hem explicat en un altre indret (*Cf. supra*, § 7). Ja hem explicat allí perquè Russell no desenvolupà a *Principles* aquesta idea. Ara bé, el fet que Russell la reprengués el 1904 a través de la teoria *zig-zag* mostra que Russell no estava del tot satisfet amb la solució de *Principles*, i la causa d'això no podia ser només que aquesta teoria no pogués resoldre les paradoxes proposicionals -perquè aleshores hagués estat suficient afegir una ramificació de les proposicions a la teoria, encara que això resultes poc intuïtiu-, sinó fonamentalment que aquesta teoria no aconseguia evitar l'ús de dos tipus de variables -a banda, de les variables restringides de les diferents jerarquies de tipus-, a saber, les variables individuals i funcionals, per la qual cosa romania oberta la possibilitat que sorgissin paradoxes a nivell intensional. Mitjançant la teoria *zig-zag*, Russell intentarà llavors evitar la formació d'aquesta mena de paradoxes, imposant certes restriccions sobre la variabilitat de les funcions. Però, com hem explicat en la secció anterior, Russell no reeixirà en l'intent de bastir un conjunt d'axiomes satisfactori que expressi aquestes restriccions. Amb tot, la situació canviarà radicalment a partir de la teoria de les descripcions de 1905. Com ja sabem, aquesta teoria permetia definir les funcions a partir de les descripcions definides, les quals eren símbols incomplets que només adquirien significat a partir de determinades definicions contextuals. Això constituí, segons el parer de Russell, un primer pas en la solució de les paradoxes intensionals perquè permetia definir -eliminar- les variables funcionals o dependents de les funcions quadràtiques i convertir aquestes en expressions del tipus ϕx, això és, expressions amb un sol tipus de variable i en les quals el símbol de funció ja no figura, doncs, com a subjecte lògic. El segon pas serà llavors eliminar aquest símbol de funció, substituint-lo per un símbol incomplet, en el qual no aparegui cap símbol de funció i que per les seves característiques intrínseques només pugui ser completat mitjançant un argument individual. Això és el que farà precisament la teoria substitucional. Aquest punt de vista el trobem exposat clarament en una lletra a Couturat de 23/10/1905, la qual constitueix la primera referència a la teoria substitucional que coneixem. Segons Russell, en efecte:

> Per evitar les contradiccions i fer els elements de les matemàtiques rigorosos, és absolutament necessari no emprar una lletra simple, com ara ϕ o f per una variable que no pot esdevenir una entitat arbitrària, sinó que en veritat és una variable *dependent*. Suposem que volem dir, p. ex.
>
> $$(\phi, f) : \phi ! f`x. \qquad \text{(A)}$$
>
> Els valors de ϕ i f en qüestió no són els mateixos que els valors de x a $(x).\phi!x$. Ara bé, sempre podem reduir proposicions com ara (A) a una altra forma que no contingui aquest altre tipus de variabilitat. Tot el que fa la teoria de les funcions denotatives és reemplaçar la variabilitat de f per la variabilitat de ϕ: aquest és un primer pas. En lloc de $f`x$, la funció general denotativa es considera que és $\psi\iota`x$, o
>
> $$\psi\iota`x \; `\dot{y}\, (\psi!(x,y)). \qquad \text{Df}$$
>
> P. ex. "el fill de x" = "l'home y tal que x engendrà y". Així, en lloc de (A) tindrem
>
> $$(\phi, \psi) : \phi!\psi\iota`x. \qquad \text{(B)}$$
>
> En lloc de $\phi!x$ podem posar $p\frac{x}{a}$, que significa "el resultat de substituir x per a en p"; si a no ocorre en p, $p\frac{x}{a} = p$ [...] Així, només tindrem un tipus de variable independent [...] Penso, una vegada més, que la solució de les contradiccions s'ha de trobar en mantenir que no hi ha classes ni relacions.[1]

Un cop explicades les raons que dugueren Russell a proposar *TSS* com a realització de la idea d'una teoria sense classes per tal de solucionar les paradoxes, cal que estudiem amb una mica més de detall, els trets essencials de *TSS*. Com hem dit al començament d'aquesta secció, la idea essencial de *TSS* consisteix a analitzar tot enunciat en el qual figuri un símbol de classe o relació -en intensió o extensió- com un enunciat en el qual figura un símbol incomplet p/a, on p representa una proposició i a un constituent seu i que s'ha de llegir com:

"el resultat de substituir a en p per ..."

[1] Citat en la introducció de *Russell 1994*, xxxvii-xxxviii.

Russell anomena p/a la *matriu* de la substitució, la qual constitueix manifestament un símbol incomplet. De fet, una matriu només adquireix significat en el context d'un enunciat del tipus $p/a; b!q$ que, en principi, significa "q resulta de substituir a per b en p", encara que Russell l'empri més sovint com l'asserció d'aquest q, *i.e.* com equivalent a l'enunciat "el q que resulta de substituir a per b en p és vertader". Així, per exemple, els enunciats:

"Sòcrates satisfà "$\hat{x}$ *és savi*""

o

"Sòcrates és savi",

s'analitzen a través de l'enunciat:

"el resultat de substituir *Sòcrates* per *Plató* a *Plató és savi* és vertader",

que és un enunciat de la forma $p/a; b!q$. I, per exemple, els enunciats:

"Per tota funció $\phi\hat{x}$, Sòcrates satisfà $\phi\hat{x}$ i Plató no satisfà $\phi\hat{x}$"

o

"Per tota classe u, Sòcrates és un u i Plató no és un u",

s'analitzen a través de l'enunciat:

"Per tota proposició p i tota entitat a, el resultat de substituir a en p per Sòcrates és vertader i el resultat de substituir a en p per Plató és fals" .

I com que el procediment anterior és extensible també a les relacions, considerant en lloc de les matrius o enunciats del tipus p/a o $p/a; b!q$, matrius o enunciats del tipus $p/(a_1, ..., a_n)$ o $p/(a_1, ..., a_n); (b_1, ..., b_n)!q$ respectivament, els resultats de l'anàlisi anterior referent als enunciats relatius a classes -en intensió i extensió- són extensibles també als enunciats relatius a relacions -en intensió i extensió.

Com hem dit abans, el símbol p/a (o $p/a_1, ..., p/a_n$) és un símbol incomplet, és a dir, no denota cap entitat, encara que si ho facin p i a. Aquest símbol, en efecte, és definit en diversos contextos com ara $p/a; b!q$. Els altres contextos significatius per al desenvolupament de la teoria substitucional en tant que realització d'una teoria sense classe són els enunciats $b \in p/a$ i $p/a = q/b$ que es defineixen com segueix:

$$b \in p/a \stackrel{df.}{=} \text{el } q \text{ tal que } p/a; b!q \text{ és vertader}$$

$$p/a = q/b \stackrel{df.}{=} (\forall x)(p/a; x \equiv q/b; x)$$

(l'extensió de la primera definició per a les relacions requereix definir $b_1, ..., b_n \in p/(a_1, ..., a_n)$ i $q(b_1, ..., b_n) \in p/(a_1, ..., a_{n+1})$; en canvi, l'extensió de la segona s'obté immediatament generalitzant a n variables. Val a dir, amb tot, que la definició de la substitució simultània de n variables, és a dir, la definició de $p/(a_1, ..., a_n); (b_1, ..., b_n)!q$, no és immediata).[1] Aquestes definicions asseguren, en definitiva, que "una matriu té totes les propietats formals d'una classe"[2] i, per tant, que puguem expressar tots els axiomes i teoremes de la teoria de classes sense haver d'assumir l'existència d'aquestes. Ara bé, estrictament parlant no hi ha matrius, car els símbols de la forma p/a han estat definits només per a certs contextos, la qual cosa vol dir que adquireixen significat només en virtut d'aquestes definicions i no en virtut de designar alguna entitat. La conseqüència fonamental d'això és que aquests símbols poden ser eliminats de tots aquells enunciats en els quals tinguin significat, això és, de tots els enunciats significatius. En paraules de Russell:

> Les matrius no són sinó abreujaments verbals o simbòlics; d'aquí que qualsevol enunciat en el qual figurin, si ha de ser un enunciat significatiu i no una simple barreja confusa d'elements, hagi de poder ser enunciat sense matrius.[3]

Les matrius, en efecte, estan distribuïdes en una jerarquia de tipus i el que determina el tipus al qual pertany cada matriu és el seu nombre de constituents. L'analogia entre la

1 Vegeu al respecte *Russell 1906$_b$*, 169 i *Hylton 1980*, 14.
2 *Russell 1906$_c$*, 637.
3 *Russell 1906$_b$*, 177.

jerarquia de matrius i la jerarquia habitual de classes i relacions de les diferents versions de la teoria de tipus i entre la solució de la paradoxa que es deriva de cada una d'elles, no és difícil d'imaginar, sobretot si es té compte la identificació en l'article "On the substitutional Theory of Classes and Relations" de les classes de classes amb una certa mena de matrius del tipus $p/(a_1, a_2)$ i altres identificacions per l'estil.[1] Car, tal com assenyala Russell a "Les paradoxes de la logique", "d'aquesta manera, obtenim una sèrie de tipus tal que, en tots els casos on pugui semblar que apareixeria una paradoxa, tenim ara una diferència de tipus que priva de sentit a l'enunciat paradoxal".[2] Així, per exemple, "la noció d'una classe que sigui membre de si mateixa esdevé un [enunciat] sense sentit",[3] car, d'acord amb la definició de la relació $\in$ esmentada més amunt, l'enunciat $p/a \in p/a$ és equivalent a:

"el resultat de substituir *a* en *p* pel resultat de substituir *a* en *p* per ...",

que és evidentment un enunciat mancat de sentit. La raó d'això és evidentment que un enunciat del tipus:

$$p/(a_1, ..., a_n); (b_1, ..., b_m)!q,$$

només és significatiu si $n = m$, és a dir, si el *tipus* de $p/(a_1, ..., a_n)$ és igual al *tipus* de $p/(b_1, ..., b_m)$, amb la qual cosa un enunciat del tipus $A \in B$ serà significatiu només si A és una matriu de tipus n (possiblement de tipus zero, *i.e.* una entitat) i B una matriu de tipus $n+1$. Naturalment, de l'anàlisi dels enunciats paradoxals relatius a relacions se'n segueixen conseqüències anàlogues. Així doncs, les definicions contextuals de classes i relacions, fornides per la teoria substitucional simple, permeten expressar significativament tots els enunciats relatius a classes i relacions, excepte els enunciats que donen origen a les paradoxes.

En resum: *TSS* conté una jerarquia de tipus de matrius, completament anàloga a la jerarquia de classes i relacions de la teoria de tipus de *Principles*. Però amb una notable diferència, a saber, que la jerarquia de matrius de *TSS* -excepte per les matrius de tipus zero- és una jerarquia de ficcions lògiques o, millor dit, de símbols incomplets, mentre que la

1 Això permet, en efecte, retrobar en la jerarquia de matrius la jerarquia de classes de classes, relacions diàdiques (triàdiques, ...) entre classes, les classes de classes de classes, etc.

2 *Russell 1906$_c$*, 637.

3 *Ibid.*, 637.

jerarquia de classes i relacions de la doctrina de tipus de *Principles* és una jerarquia d'entitats. D'aquesta manera, *TSS* permet assolir els mateixos resultats que la doctrina de tipus de *Principles* en referència a les paradoxes conjuntistes però, a diferència d'aquesta, respon millor a la idea d'una lògica amb una variable no restringida, donat que no necessita introduir variables funcionals, de classe o relacions. I, si bé és cert que *TSS* empra dos tipus de variables, individuals i proposicionals, com que les variables proposicionals es poden definir a partir de la noció de variable i implicació a la manera de *Principles*, podríem considerar que *TSS* requereix un únic tipus de variable, el rang de la qual seria qualsevol objecte -entre les quals hi hauria evidentment els individuals i les proposicions. D'altra banda, tal com hem vist fa un moment, *TSS* té com a conseqüència un *PCV* restringit a les classes i relacions, car tots el enunciats que violen aquest principi, *i.e.* tots els enunciats referents a classes o relacions que donen origen a les paradoxes, en ser analitzats o reinterpretats a la llum de la teoria substitucional, esdevenen enunciats mal formats i, per tant, mancats de significat. Veiem així, en definitiva, que *TSS* compleix el requisits, esmentats en el paràgraf anterior, que ha de satisfer tota teoria sense classes, a saber: que tingui com a conseqüència el *PCV* i satisfaci la teoria de la variable universal. I en això consistia, sens dubte, el major atractiu de *TSS* als ulls de Russell. En qualsevol cas, tal com s'esdevenia amb la doctrina de tipus de *Principles*, *TSS* és vulnerable a les paradoxes de tipus proposicional, per la qual cosa Russell reemplaçarà a "Les paradoxes de la logique" aquesta primera versió de la teoria substitucional per una altra més sofisticada, a saber, *TSR*. Segons Russell, en efecte,

> La doctrina anterior [*TSS*] resol, fins on puc veure, totes les paradoxes relatives a les classes i relacions; però per tal de resoldre l'Epimènides sembla que necessitem una doctrina similar referent a les proposicions [*TSR*].[1]

Russell parla en realitat de la paradoxa d'Eubúlides, el qual havia afirmat la proposició "jo menteixo". Si, en efecte, Eubúlides *mentia*, *no mentia* en afirmar que mentia i si *no mentia*, *mentia* en afirmar que ho feia. Com és ben sabut, aquesta és una paradoxa important i de la qual se n'han donat diferents versions. Segons Russell, la forma més plausible d'interpretar la proposició anterior ("jo menteixo") és com segueix: "hi ha una proposició p que jo afirmo i que és falsa"[2] i com que la paradoxa sorgeix quan aquesta

1 *Ibid.*, 640.
2 *Ibid.*, 643.

proposició és precisament "jo menteixo", la forma lògica corresponent a l'enunciat paradoxal seria quelcom del tipus:

$$\forall p(Ap \leftrightarrow p = \forall q(Aq \rightarrow \neg q)) \qquad (1)$$

o, en el llenguatge de la teoria substitucional:

$$\forall x(x \in p/a \leftrightarrow x = \forall x(x \in p/a \rightarrow \neg x))$$

(on p seria una proposició del tipus "jo afirmo que ..." i a una proposició qualsevol). Tal com assenyala Russell, (1) genera una contradicció tan bon punt es considera que aquest enunciat afirma una *proposició* i que aquesta és *vertadera*, car llavors podem substituir (1) per p i q successivament i deduir que aquesta proposició és vertadera (per hipòtesi) i falsa alhora. D'aquí que la solució a la paradoxa hagi de provenir, segons Russell, del reconeixement que cap judici o enunciat que contingui una variable aparent afirmi una proposició, això és, que "cap proposició pugui contenir una variable aparent", car llavors (1) no afirmarà cap proposició i, per tant, no pot ser substituït per p i q. En efecte, tal com afirma Russell:

> Aquest enunciat ["*jo menteixo*"] pot ser fals si afirmo una proposició p que és vertadera, o si no afirmo pas una proposició. La primera possibilitat engendra la contradicció. La segona només és possible si un enunciat general no afirma una proposició determinada. És aquesta última possibilitat que adoptem. Per tant, l'enunciat que diu "jo menteixo" és fals, no perquè enunciï una proposició vertadera, sinó perquè, tot i fer una enunciació, no enuncia pas una proposició.[1]

Ara bé, és important destacar quelcom que potser ha quedat dissimulat a l'anàlisi anterior, a saber, que en la formulació russelliana de la paradoxa del mentider, la contradicció sorgeix sense necessitat de fer un ús de cap noció extralògica o semàntica com, per exemple, la noció d'asserció o la noció de veritat. Remarquem, en efecte, que a l'enunciat (1) ha desaparegut tota referència a la noció de veritat -o, millor dit, de falsedat- i que la deducció de la contradicció a partir de (1) és independent de la interpretació de la constant extralògica A, car la contradicció sorgeix tan bon punt exemplifiquem, i per això només és requereix que (1) expressi una proposició i sigui, doncs, un valor possible de les variables aparents que

[1] *Ibid.*, 643.

conté. Veiem així que la paradoxa fa referència exclusivament a la noció de proposició i que es tracta d'una paradoxa estrictament de cercle viciós. D'aquí que, si *TSR* ha de resoldre aquesta paradoxa haurà de satisfer el *PCV*, el qual donarà lloc immediatament a una ramificació de les proposicions. Ara bé, si aquesta teoria ha de satisfer, a més, la teoria de la variable universal, tots els enunciats generals hauran de ser meres *façons de parler* -car, en cas contrari, la ramificació de les proposicions duria a admetre diferents tipus d'entitats i, per tant, de variables proposicionals. Russell no arriba a donar a "Les paradoxes de la logique" la jerarquia de proposicions, però hi ha la suficient evidència textual per poder afirmar que pensava en una jerarquia en la qual les proposicions elementals formarien el tipus més baix i els enunciats generals es distribuirien en la resta de tipus d'acord amb el seu nombre de variables aparents -i, per tant, de quantificadors. I, com hem dit fa un moment, si *TSR* ha de satisfer la teoria de la variable universal, aquests enunciats generals hauran de ser símbols incomplets. Ara bé, Russell no entén els enunciats generals com a símbols incomplets del mateix tipus que les matrius, això és, com a símbols que només adquireixen significat a través de determinades definicions contextuals, sinó simplement en el sentit que són símbols ambigus, que no denoten cap entitat determinada, és a dir, cap proposició particular:

> Un judici sobre *tots* (o, el que és el mateix, sobre *un qualsevol*) és en realitat l'afirmació d'una proposició (indeterminada) d'entre diverses proposicions particulars. Per exemple, si diem "Qualsevol que sigui x, $x = x$", enunciem una qualsevol de les proposicions de la forma "$x = x$"; així, encara que tinguem un nou enunciat, no tenim pas una nova proposició.[1]

Els enunciats són, doncs, ficcions lògiques i corresponent a la jerarquia d'aquestes ficcions lògiques trobarem una jerarquia dels mots *vertader* i *fals*, de manera que quan aquests mots s'apliquin amb sentit a un enunciat d'un tipus determinat, restaran sense sentit quan s'apliquin a enunciats d'un tipus diferent o als enunciats en general -tenim així que "aplicat als enunciats, el sentit del mot vertader varia amb el nom de variables aparents que aquells contenen".[2] Ara, la ramificació de les proposicions i la concomitant ramificació de les nocions de veritat i falsedat comporten una nova anàlisi i solució de la paradoxa del mentider. D'acord amb *TSR*, en efecte, l'enunciat "jo menteixo" s'hauria d'interpretar a través de l'enunciat "jo faig en aquest moment una enunciació falsa" i com fals no es pot aplicar

1 *Ibid.*, 640.
2 *Ibid.*, 644.

significativament als enunciats en *general*, sinó només als enunciats amb un nombre determinat de variables, haurem d'interpretar l'enunciat d'Eubúlides a traves de l'enunciat "jo faig una enunciació falsa que conté n variables aparents". Ara bé, continua Russell "aquest enunciat conté $n+1$ variables aparents [...] per tant, no s'aplica a si mateix".[1] D'aquesta manera, conclou Russell, "evitem totes les paradoxes del tipus de l'Epimènides, puix que, per tota enunciació proposada, podem mostrar que no s'aplica pas a si mateixa".[2]

Ara bé, malgrat les aparences, la formulació i solució anteriors de la paradoxa del mentider no requereixen novament cap noció semàntica o extralògica, car el fet de no poder parlar significativament dels enunciats en general i la no aplicabilitat d'un enunciat a si mateix són una conseqüència immediata de la ramificació de les proposicions. En particular, i de forma significativa, la solució d'aquesta paradoxa no requereix que els enunciats generals siguin símbols incomplets, això és, que afirmin una proposició determinada, la qual cosa mostra que aquesta noció de símbol incomplet, a diferència de la noció homònima referida a classes i relacions, és una noció completament irrellevant per a la solució de les paradoxes proposicionals. Això mostra, des del nostre punt de vista, les limitacions de *TSR*. Notem en efecte, que els enunciats generals no s'arriben a introduir mai com a símbols incomplets pròpiament dits, això és, com a símbols el significat dels quals vindria donat per determinades definicions contextuals, i no hi ha cap evidència textual que doni peu a pensar que Russell arribés a considerar aquesta possibilitat -de fet, es fa difícil imaginar com podríem introduir els enunciats generals com a símbols incomplets, car ¿de quina mena serien aquests símbols i com els podrien definir contextualment? i ¿què és el que hauríem de definir? Però llavors està clar que *TSR* no podia oferir als ulls de Russell l'atractiu que oferia *TSS*. En efecte, *TSR* ja no és com *TSS* una teoria en la qual tots els objectes que contenen una variable aparent han estat introduïts com a símbols incomplets i que permet analitzar tot enunciat en el qual figurin els símbols complets que denoten aquells objectes a través d'enunciats en els quals ara figuren només els corresponents símbols incomplets, de manera que la manca de sentit de l'enunciat de *TSR* impliqui la manca de sentit de l'enunciat de partida. Car, com ja hem dit, en *TSR* no hi ha símbols incomplets a través dels quals hom hagi introduït els enunciats generals i, per tant, no hi ha una jerarquia de símbols incomplets anàloga, però al mateix temps diferent, a la jerarquia d'enunciats -tal com s'esdevenia amb la jerarquia de matrius i la jerarquia de classes i relacions-, sinó que ambdues jerarquies són la mateixa. Aquesta és, en definitiva, la raó per la qual Russell abandonà la teoria substitucional

1 *Ibid.*, 643.

2 *Ibid.*, 643-44.

i la substituí en l'article "Mathematical Logic" de 1908 per la teoria de tipus: donat que les paradoxes proposicionals obliguen a postular una jerarquia dels enunciats generals i donat que aquests no es poden introduir com a símbols incomplets, Russell assumeix l'existència com entitats de ple dret de tota la jerarquia, tant de les proposicions elementals com de les generals; però aleshores, és clar, s'haurà de renunciar a la teoria de la variable universal. Aquest és el peatge que ha de pagar Russell per passar de *TSR* a *TTR* -encara que, tal com explicarem més endavant, el fet que les proposicions s'introdueixin com a funcions 0-àries i certs trets característics de les funcions permetran a Russell seguir pensant que aquesta última teoria satisfà en certa manera la teoria de la variable universal.

Voldríem, per acabar, fer algunes consideracions que ajudin a comprendre millor perquè Russell adoptarà a partir de 1906 la paradoxa del mentider com paradoxa proposicional *par excellence* i s'oblidarà de la paradoxa proposicional de *Principles*. Pel que hem vist fins ara, *TSS* no tan sols és *insuficient* per donar raó de totes les paradoxes -car només pot donar raó de les paradoxes relatives a classes i relacions, però no de les relatives a proposicions- sinó també que és *inconsistent* ella mateixa, car la lògica emprada per al desenvolupament d'aquesta teoria genera també contradiccions. Això és així, perquè, encara que el plantejament de la paradoxa del mentider i la seva solució siguin independents de *TS*S, car s'expressen en el llenguatge de la lògica de primer ordre -més precisament, en el llenguatge de la lògica de primer ordre ampliat amb variables proposicional-, aquestes paradoxes afecten de ple a *TSS* en la mesura que *TSS* requereix, tal com ja hem vist, tot el poder expressiu d'aquesta lògica per al seu desenvolupament. I, encara que hom podria argumentar que la paradoxa del mentider requereix la utilització d'una constant extralògica i, per tant, no demostra *strictu sensu* la inconsistència d'aquesta teoria sinó la d'aquesta teoria amb l'afegit de l'enunciat (1) com axioma extralògic, la inconsistència del qual podria atribuir-se a l'ús incoherent d'una noció extralògica, el cert és que Russell no interpretava la paradoxa generada per (1) com una paradoxa semàntica o extralògica, sinó com una paradoxa de cercle viciós. En qualsevol cas, tal com ha explicat Hylton, en el marc de *TSS* podríem generar la paradoxa proposicional de *Principles* de la següent manera:

> Sigui p/a una matriu que només tingui proposicions com a membres, *i.e.* sigui p/a una matriu tal que $p/a; b$ és vertadera si, i només si, b és una proposició. Amb cada matriu d'aquest tipus podem associar una proposició p^*_aque digui que tots els membres de p/a són proposicions vertaderes. Sigui q la següent proposició:

$$(\exists p,a)(p_a^* = ((\forall x)(p/a; x \to x \text{ és vertadera})) \land \neg(p_a^* \in p/a)).$$

Llavors q/p_a^* serà una matriu tots els membres de la qual són proposicions. Associem amb ella una proposició $q_{p_a^*}^*$ que digui que tots els membres de q/p_a^* són proposicions vertaderes. La contradicció sorgeix aleshores en preguntar-nos si $q_{p_a^*}^*$ és un membre de q/p_a^*.[1]

Ara bé, fixem-nos que aquesta paradoxa sorgeix sense emprar cap noció semàntica o extralògica -notem, en efecte que "*x* és vertadera" es podria substituir per l'expressió +*x*, on + seria una operació unària que s'interpretaria en el sentit desitjat-, per la qual cosa demostra la inconsistència de *TSS*. Ara bé, tal com ja hem explicat, la formulació russelliana de la paradoxa del mentider no requereix tampoc cap noció semàntica o extralògica i, donada la similitud d'aquesta paradoxa amb la de *Principles* i la major complicació d'aquesta última, es probable que Russell preferís l'exposició de la paradoxa del mentider en comptes de la paradoxa relativa a les proposicions de *Principles*. Això explicaria, en definitiva, perquè la paradoxa del mentider ocuparà partir de 1906 el lloc de la paradoxa proposicional formulada en l'Apèndix B de *Principles*.

11. La teoria dels tipus lògics de *Principia Mathematica*

Com ja sabem, la primera versió de la teoria de tipus data de 1903. Una vegada abandonada la teoria substitucional de 1906, Russell en donarà una nova versió en el seu famós article "Mathematical Logic as based on the Theory of Types" (*1908*). La versió de la teoria de tipus presentada en aquest article coincideix essencialment amb la versió del capítol II de la Introducció de *Principia Mathematica* (*1910*) i la de l'article "La théorie des types logiques" (*1910$_b$*), que és essencialment una traducció al francès del capítol II de la Introducció de *Principia*, publicada com a rèplica a un article anterior de Poincaré en el qual aquest autor criticava alguns aspectes de l'article de 1908 abans esmentat. Aquesta versió de la Introducció de *Principia* cal distingir-la, tal com assenyala Russell en el Prefaci (p. vii), de la versió presentada en el capítol XII de la mateixa obra. Així doncs, sembla convenient exposar la teoria de tipus a partir de la consideració conjunta de l'article "Mathematical Logic" i de la Introducció de *Principia*, encara que, donat que l'exposició de l'article de 1908

[1] *Hylton 1980*, 24.

és superada àmpliament per la de la Introducció de l'obra de 1910, ens referirem principalment a aquesta última.

La teoria dels tipus lògics és, com la teoria substitucional, una teoria que té com objectiu principal evitar les paradoxes, l'origen de les quals rau invariablement, segons afirma Russell d'ençà 1905, en alguna mena de cercle viciós. Així, doncs, és evident que, tal com s'esdevenia amb la teoria substitucional, el *PCV* jugarà també un paper fonamental en la formulació de la teoria de tipus. Ara bé, mentre que en la teoria substitucional es deduïa del *PCV* una jerarquia de ficcions lògiques -classes o funcions, relacions i enunciats generals-, en la teoria de tipus es deduirà a partir del *PCV* una jerarquia d'entitats lògiques -funcions proposicionals i proposicions. La raó per la qual el *PCV* dóna lloc a dues menes de jerarquies de naturalesa tan distinta és ben senzilla: a "Les paradoxes de la logique", Russell considera tota expressió que conté una variable aparent un símbol incomplet, per la qual cosa el *PCV* duu a una jerarquia dels símbols incomplets o ficcions lògiques, els quals s'haurien d'introduir contextualment a partir de les entitats lògiques pròpiament dites -els individuals i les proposicions elementals. En canvi, a "Mathematical Logic" i *Principia* es recuperen les funcions proposicionals -que havien estat reemplaçades en la teoria substitucional per les matrius- i les proposicions -tant elementals com generals- com entitats legítimes. I, donat que, tal com explicarem més endavant, tant les funcions proposicionals com les proposicions poden contenir variables aparents, una formulació essencialment anàloga del *PCV* a la de "Les paradoxes de la logique" duria a una jerarquia d'aquestes entitats lògiques. En qualsevol cas, és important destacar que tant a "Mathematical Logic" com a *Principia*, hi ha diferents formulacions del *PCV*, la majoria de les quals difereixen -si més no aparentment- de la formulació de "Les paradoxes de la logique". Les formulacions de "Mathematical Logic" i *Principia* coincidents literalment en ambdós llocs són les següents:

> (*i*) "Qualsevol cosa que suposi [*involves*] *tot* [*all*] d'una col·lecció no ha de ser un [membre] d'aquesta col·lecció".[1]
>
> (*ii*) "Si, donat que una col·lecció té un total, llavors té membres definibles només en termes d'aquest total, llavors la dita col·lecció no té total".[2]
>
> (*iii*) "Cap totalitat pot contenir membres definits en termes de si mateixa".[3]

---

1 *Russell 1956*, 63 (*1910*, 37).
2 *Ibid.*, 63 (37).
3 *Ibid.*, 63 (37).

A *Principia*, Russell reserva el nom de *principi de cercle viciós* a les dues primeres formulacions. En canvi, a "Mathematical Logic" reserva aquest nom per la tercera formulació i la següent, que és equivalent, segons ell, a l'anterior:

> (*iv*) "Qualsevol cosa que conté una variable aparent no ha de ser un valor possible d'aquesta variable".[1]

Aquesta darrer formulació del *PCV* és idèntica a la de "Les paradoxes de la logique" i és, en canvi, l'única formulació que no apareix a *Principia*. La pregunta que es planteja immediatament és llavors: ¿podem parlar encara d*el PCV* i de diferents formulacions d'un mateix principi o hem de parlar, més aviat, de principis diferents? Com veurem en la darrer secció, Gödel sosté l'existència a *Principia* de tres principis diferents corresponent cada un d'ells a les expressions "definible en termes de", "suposa" i "pressuposa"; però, com intentarem demostrar també allí, aquesta distinció és irrellevant per a les entitats intensionals -funcions proposicionals i proposicions-, a les quals fa referència essencialment el *PCV*. De moment, ens contentarem en notar que, tal com es desprèn de la lectura de l'article d 1908 i l'obra de 1910, Russell emprava indistintament les tres formulacions abans esmentades i, en definitiva, que entenia (*i*), (*ii*) i (*iii*) com diferents formulacions d'un mateix principi. Per veure això i abans de considerar l'aplicació del *PCV* al cas fonamental de les funcions proposicionals, considerarem l'aplicació d'aquest principi a les proposicions, tot barrejant indistintament la terminologia de les diferents versions del *PCV*. Preguntem-nos, en efecte, si la col·lecció de proposicions té *total*, és a dir, si podem parlar significativament de la col·lecció de totes les proposicions o si, més aviat, aquesta col·lecció requereix una partició, una divisió en diversos *tipus* de manera que només puguem parlar significativament de "totes les proposicions d'un determinat *tipus*". En el primer cas, és evident que tindríem un sol tipus de variable proposicional o, el que és el mateix, que les variables proposicionals tindrien com a rang totes les proposicions. Però llavors les proposicions del tipus $\forall p(\varphi p \wedge \neg p)$ generarien immediatament paradoxes de cercle viciós en ser aquestes mateixes proposicions valors possibles de les seves variables aparents, *i.e.* en la mesura que aquestes proposicions *suposen*, *pressuposen* o *estan definides en termes de* la col·lecció de proposicions. D'aquí se segueix que qualsevol principi que pretengui evitar les paradoxes de cercle viciós haurà de ser un

[1] *Ibid.*, 63.

principi formulat essencialment en els mateixos termes que les formulacions (*i*)-(*iv*) del *PCV* que hem considerat abans.

A banda de la necessitat de distingir tres principis de cercle viciós, un per cada una de les expressions abans esmentades, Gödel sosté que per prevenir les paradoxes intensionals "encara s'hagué d'assumir un altre principi"[1] que prohibia que una funció proposicional pogués aplicar-se a si mateixa, això és, que pogués ser el seu propi argument. Aquest principi, en efecte, és el següent:

(*v*) "Cap funció pot tenir entre els seus valors res que pressuposi la funció",

d'on se segueix que, tal com explicarem més endavant, una funció proposicional pressuposa també la col·lecció o rang dels seus arguments possibles. Segons Gödel, la necessitat d'afegir aquest principi rau en què "altrament el concepte "no s'aplica a si mateix" no pressuposaria cap totalitat (donat que no conté cap quantificació) i el principi de cercle viciós no evitaria la seva aplicació a si mateix".[2] Ara bé, aquesta anàlisi és correcta només si s'assumeix que, per a Russell, un concepte o funció proposicional pressuposa una totalitat de valors només quan conté un quantificador i que el *PCV* -en qualsevol de les tres primeres formulacions- només s'aplicaria a les funcions proposicional en aquest cas. Però, encara que aquesta era potser l'opinió de Russell a "Les paradoxes de la logique", ja no l'és a "Mathematical Logic" i *Principia*. De la caracterització de les funcions proposicionals que explicarem tot seguit és desprèn, en efecte, que una entitat d'aquesta mena pressuposa no només la totalitat dels valors possibles de les seves variables aparents, sinó també la de les seves variables reals. I aquesta és segurament la raó per la qual en algunes de les formulacions del *PCV* de l'article de 1908 i en totes les de l'obra de 1910 es deixi de banda tota referència a les variables aparents -notem, en efecte que les formulacions (*i*), (*ii*) i (*iii*) impliquen (*iv*), però el recíproc no és cert. A més, l'evidència textual mostra que Russell no entenia (*v*) com "un altra principi de cercle viciós", sinó com "un cas particular, encara que potser el més fonamental, del principi de cercle viciós".[3] Car, en efecte, Russell considera a *Principia* que les funcions proposicionals -i les proposicions, en tant que funcions 0-àries- i els individuals són les úniques entitats lògiques legítimes i, consegüentment, dedueix a partir de la jerarquia d'aquestes entitats a la qual dóna lloc (*v*), la resta de jerarquies -essencialment la jerarquia de

[1] *Gödel 1990*, 125.
[2] *Ibid.*, 126.
[3] *Russell 1910*, 39.

classes i relacions. De fet, la mateixa comprensió de la noció de *tipus* d'una funció proposicional depèn de la correcta interpretació de (*v*) i aquesta alhora de la caracterització russelliana de la noció de funció proposicional. Aquests són precisament els temes que explicarem a continuació com a pas previ i indispensable per a l'exposició de la jerarquia de funcions proposicionals i proposicions de la teoria de tipus.

Un dels punts més conflictius alhora de fer l'exegesi de la teoria de tipus de "Mathematical Logic" i *Principia* és la interpretació de la mateixa noció de *tipus* d'una funció proposicional. De fet, com veurem a continuació, Russell utilitza tant en l'article de 1908 com a *Principia* dues nocions diferents de *tipus*, identificant la primera amb el *rang de significació* i la segona amb l'*ordre* d'una funció proposicional. En efecte, Russell defineix a "Mathematical Logic" un *tipus* com "el rang de significació d'una funció proposicional",[1] i aquest, com "la col·lecció d'aquells arguments per als quals la funció en qüestió és significant, *i.e.* té un valor".[2] Com que el valor d'una funció proposicional és una proposició és dedueix de l'anterior que el tipus d'una funció proposicional és el conjunt de valors possibles d'aquesta funció, això és, el conjunt de valors per als quals aquesta funció esdevé una proposició en ser assignat a cada un dels arguments de la funció un element d'aquell conjunt. En una nota a peu de pàgina, Russell dóna una definició una mica diferent del rang de significació o tipus d'una funció proposicional. Aquest, assenyala Russell allí, "consisteix en tots els arguments per als quals la funció és vertadera, junt amb tots els arguments per als quals és falsa".[3] Aquesta definició conté un notable abús de llenguatge, però hom entén perfectament què vol dir Russell: el tipus d'una funció proposicional és el conjunt de valors per als quals aquesta funció esdevé una proposició *vertadera* o *falsa* en ser assignat a cada un dels arguments de la funció un element d'aquell conjunt. En altres paraules, el rang de significació o tipus d'una funció proposicional és el *rang de veritat* més el *rang de falsedat* d'aquesta funció. Evidentment, Russell només podia considerar com equivalents ambdues definicions del tipus d'una funció proposicional en la mesura que considerés que les proposicions només poden ser vertaderes o falses, és a dir, que totes les proposicions són significatives. I aquest és, com sabem, el punt de vista de Russell d'ençà "On Fundamentals" i "On Denoting". Si, d'una altra banda i com Russell fa sovint, en lloc de atribuir el significat o sentit a les proposicions, l'atribuïm a les expressions -per exemple, les expressions funcionals o els enunciats-, de manera que una expressió sigui significativa o tingui sentit si

1 *Russell 1956*, 75.
2 *Ibid.*, 75.
3 *Ibid.*, 72.

expressa o designa una entitat -per exemple, una funció o una proposició-, llavors la pregunta òbvia és: ¿com sabem si enunciat expressa una proposició o no?, és a dir: ¿com sabem si enunciat és significatiu o no? La resposta ens la dóna evidentment la jerarquia de tipus: cada funció determina un tipus, al qual han de pertànyer els valors possibles dels seus arguments, per tal que la substitució d'aquests per aquells esdevingui realment una proposició. Quan substituïm els arguments d'una funció proposicional per valors que no pertanyin al seu tipus o rang de significació, la funció proposicional esdevindrà un absurd, un enunciat mancat de sentit. En altres paraules, l'únic discurs significatiu en el marc de la teoria de tipus, serà el discurs que no violi les restriccions tipològiques imposades pel *PCV* i a les quals esta sotmesa l'assignació de valors als arguments d'una funció proposicional. Les consideracions anteriors respecte al rang de significació de les funcions proposicionals concorden perfectament amb la definició a *Principia* d'aquestes entitats com entitats essencialment ambigües. Així, assenyala Russell allí que:

> Per una "funció proposicional" entenem quelcom que conté una variable x, i expressa una proposició tan aviat com s'assigna un valor a x. És a dir, difereix d'una proposició només pel fet que és ambigua: conté una variable el valor de la qual no està assignat.[1]

Emprant la terminologia i notació de *Principia*, podríem dir que la funció $\phi\hat{x}$ denota ambiguament els seus valors: ϕa, ϕb, ϕc, ... i que ϕx és un valor ambigu de $\phi\hat{x}$. Veiem així que una funció proposicional pressuposa els seus valors i, per tant, no estarà ben definida fins que tots els seus valors no estiguin determinats. D'aquí se segueix, afirma Russell, que "cap funció no pot tenir entre els seus valors res que pressuposi la funció, car si ho tingués, no podríem considerar els objectes denotats ambiguament per la funció com definits fins que la funció estigués definida; però, com acabem de veure, la funció no pot estar definida fins que els seus valors estiguin definits".[2] Aquest és, tal com s'ha dit fa un moment, un cas particular però el més important del principi del cercle viciós. Ara bé, donat que les funcions proposicionals es caracteritzen precisament perquè els seus valors possibles formen part del valor de la funció un cop assignat aquests valors als seus arguments, concloem que una funció proposicional pressuposa el seus valors possibles, *i.e*. el seu *tipus* o *rang de significació*. Així, per exemple, si $\phi\hat{x}$ és una funció proposicional, x no podrà rebre valors que

1 *Russell 1910*, 38.
2 *Ibid.*, 39.

pressuposin$\phi\hat{x}$ i, per tant, no podrà ser de la forma ϕx. Conseqüentment, assenyala Russell, " $\phi(\phi\hat{x})$" no ha d'expressar una proposició, com ho fa "ϕa" si ϕa és un valor per $\phi\hat{x}$. De fet, " $\phi(\phi\hat{x})$" ha de ser un símbol que no expressi res: podríem dir, per tant, que no és significant".[1] En definitiva, la definició del tipus d'una funció proposicional com el seu rang de significació duria, d'acord amb el principi del cercle viciós, a construir una jerarquia de funcions proposicionals, en el tipus més baix de la qual hi figurarien els individuals, vindrien després les funcions que només tenen individuals com a arguments possibles, després les funcions que tenen les funcions del tipus anterior com a arguments possibles, i així successivament. Es tractaria, en definitiva, d'una jerarquia *simple* de tipus de funcions, en el sentit que el tipus de cada funció proposicional estaria determinat exclusivament pel seus valors possibles. Però, tal com assenyala Russell a *Principia*, "la jerarquia que s'ha de construir no és tan simple com podria parèixer a primera vista. [Car] les funcions que poden prendre *a* [*i.e. un individual*] com argument formen una totalitat il·legítima i requereixen elles mateixes ser dividides en una jerarquia de funcions".[2] Russell posa com exemple la funció

$$(\phi) \cdot f(\phi\hat{z}, x)$$

Aquesta funció és, com $\phi\hat{x}$, una funció de x; "però, donat que aquesta funció pressuposa una totalitat de valors de $\phi\hat{z}$, no pot ser ella mateixa, pel principi de cercle viciós, un dels valors inclosos en la totalitat",[3] *i.e.* $(\phi) \cdot f(\phi\hat{z}, x)$ no pot ser del mateix tipus que $\phi\hat{x}$. Per entendre el raonament de Russell una mica millor considerem, per exemple, les següents funcions de x: (*i*) $\phi\hat{x}$ i (*ii*) $(\phi) \cdot (\phi\hat{x} \rightarrow \phi a)$. Si ambdues funcions foren del mateix tipus, llavors (*ii*) seria un valor possible de la seva variable funcional aparent i hom cauria de bell nou en les fal·làcies de cercle viciós que la teoria de tipus havia d'evitar. Ara bé, ve a dir Russell, és evident que (*ii*) no només pressuposa la totalitat dels valors possibles del seu argument x, sinó també la totalitat dels valors possibles de la seva variable funcional aparent ϕ. Per tant, pel principi del cercle viciós, (*ii*) no pot ser un valor possible de la seva variable aparent. En altres paraules, la totalitat de funcions per a les quals x és un argument és una totalitat il·legítima i, doncs, la quantificació sobre totes les funcions d'aquesta mena és una expressió sense sentit.

---

1 *Ibid.*, 40.
2 *Ibid.*, 48.
3 *Ibid.*, 49.

Evidentment, el raonament anterior dóna per suposat que una funció proposicional pot contenir no només variables reals o lliures, sinó també variables aparents o lligades i, en definitiva, quantificadors. Aquesta tesi marca un punt d'inflexió clar respecte a l'anàlisi de les funcions proposicionals característic de *Principles* i "On Denoting" i, com veurem ben aviat, és a la base de la jerarquia de funcions de "Mathematical Logic" i *Principia*.[1] Ara bé, d'aquesta tesi se segueix immediatament que una funció proposicional pressuposarà no només els valors possibles dels seus arguments sinó també el de les variables aparents que figuren en ella. Així, pel principi del cercle viciós el *tipus* d'una funció estarà determinat no només pel seu rang de significació sinó també pel que podríem anomenar la seva profunditat de quantificació. Russell anomenarà *ordres* als tipus lògics entesos en aquest sentit, per distingir-los així dels tipus entesos com a *rangs de significació*. En definitiva, l'ordre o tipus lògic d'una funció proposicional estarà determinat per dos principis: (*i*) una funció proposicional és d'ordre superior a qualsevol dels seus valors possibles i (*ii*) una funció proposicional és d'ordre superior a qualsevol objecte que pertanyi al rang de qualsevol quantificador que ocorri en ella. La jerarquia *ramificada* de funcions proposicionals que així s'obté constitueix el moll de l'os de la teoria dels tipus lògics proposada en l'article "Mathematical Logic" i *Principia*, els trets essencials de la qual explicarem a continuació.

A *Principia* Russell anomenarà *matrius* a les funcions proposicionals que no contenen quantificadors -això no vol dir, tanmateix, que en el rang de les seves variables no hi hagi funcions amb quantificadors. Ara, si $\phi(\hat{x},\hat{y})$ és una matriu, llavors, per exemple, $(x)\cdot\phi(x,\hat{y})$ i $(\exists y)\cdot\phi(\hat{x},y)$ seran respectivament funcions de x i y i $(x,y)\cdot\phi(x,y)$ serà una proposició. Així, assenyala Russell, "és evident que totes les proposicions i funcions possibles es poden obtenir a partir de matrius mitjançant el procés de convertir els arguments de les matrius en

[1] Hylton ha argumentat que la tesi anterior estaria implícita en la tesi russelliana segons la qual una funció proposicional només es diferencia d'una proposició per la seva ambigüitat, de manera que, de la mateixa forma que les proposicions poden contenir quantificadors, també poden contenir-ne les funcions proposicionals (*Cf. Hylton 1990*, 298). Però aquesta tesi oblida (*i*) que la caracterització de les funcions com a entitats ambigües fa referència només a les funcions proposicionals que no contenen variables aparents, *i.e.* a les funcions proposicionals en el sentit habitual del terme i (*ii*) que aquesta caracterització és de *Principia*. En canvi, la possibilitat de que les funcions proposicionals continguin variables aparents és present ja a "Mathematical Logic". A més, i a conseqüència de l'anterior, Hylton suggereix que de la mateixa manera que a partir d'una proposició elemental com ara "Sòcrates és home" hom obté la funció proposicional ϕx, a partir d'una proposició general com ara "Hi havia una dona a la qual estimava Sòcrates", hom obtindria la funció $\exists y(R\hat{x}y)$. Però, de bell nou, aquest punt de vista oblida que les proposicions general són a l'obra de 1910 "falses abstraccions" i els seus símbols "símbols incomplets" i, doncs, seran elles les que es defineixin a partir de funcions proposicional d'un determinat tipus i no a l'inrevés. Aquest és un punt clau per entendre la diferència entre la teoria de tipus de l'article de 1908 i la de l'obra de 1910 i tornarem sobre ell més endavant.

variables aparents”,[1] això és, a partir de la quantificació o *generalització* sobre *algunes* o *totes* les variables reals de la matriu. Així, la jerarquia de funcions i proposicions estarà determinada, d’acord amb els dos principis abans esmentats, pels dos principis següents: (*i*) cada matriu és d’ordre superior a l’ordre màxim dels seus arguments i (*ii*) cada funció o proposició obtinguda per generalització a partir d’una matriu serà del mateix ordre que l’ordre d’aquesta matriu -donat que el rang de quantificació de cada variable aparent que figuri en aquesta funció no és més que el rang de significació de la variable real a partir de la qual s’ha obtingut.[2]

D’acord amb l’anterior, les *funcions de primer ordre* estaran formades per les matrius els arguments de les quals són individuals, *i.e.* matrius com ara

$$\phi\hat{x},\ \psi(\hat{x},\hat{y}),\ \chi(\hat{x},\hat{y},\hat{z}),\ \ldots$$

i les funcions obtingudes a partir d’elles per generalització sobre algun dels seus arguments, això és, funcions com ara

$$(y)\cdot\psi(\hat{x},y),\ (\exists y)\cdot\psi(\hat{x},y),\ (y,z)\cdot\chi(\hat{x},y,z),\ \ldots$$

En altres paraules, les funcions de primer ordre seran aquelles que pressuposen només la totalitat dels individus. Les *funcions de segon ordre* seran funcions que “o bé són matrius de segon ordre o es deriven de les matrius d’aquesta mena convertint algun dels seus arguments en variables aparents”,[3] és a dir, matrius com ara

$$f(\phi!\hat{z}),\ g(\phi!\hat{z},\psi\hat{z}),\ F(\phi!\hat{z},x),\ \ldots$$

-on $\phi!\hat{x}$ representa qualsevol funció de primer ordre- i funcions com ara

$$(\phi)\cdot g(\phi!\hat{z},\psi\hat{z}),\ (x)\cdot F(\phi!\hat{z},x),\ (\phi)\cdot F(\phi!\hat{z},x),\ \ldots$$

---

[1] *Russell 1910*, 51.

[2] En definitiva, assenyala Russell, “si l’ordre més alt d’una variable que ocorre en una funció, ja sigui com argument o bé com a variable aparent, és una funció d’ordre *n*-èsim, llavors la funció en la qual figura és d’ordre $n+1$-èsim” (*Ibid.*, 53). Ara bé, l’elecció de $n+1$ és arbitrària, és a dir, podríem assignar a la funció en qüestió qualsevol ordre *m*, amb la condició que *m* fos estrictament més gran que *n*.

[3] *Ibid.*, 52.

Remarquem, doncs, que les funcions de segon ordre poden tenir com arguments tant funcions de primer ordre com individuals, degut al fet que les matrius de segon ordre han de tenir necessàriament com arguments funcions de primer ordre, però també poden tenir com arguments individuals. Així, per exemple, les dues primeres funcions de la llista anterior són funcions de $\psi\hat{z}$ i $\phi!\hat{z}$ respectivament, mentre que la darrer és una funció de x. En definitiva, les funcions de segon ordre seran aquelles que pressuposen la totalitat de les funcions de primer ordre. Les *funcions de tercer ordre* s'obtindran a partir de les funcions de segon ordre de forma anàloga a com les funcions de segon ordre s'obtenien a partir de les de primer ordre, és a dir, seran o bé matrius de tercer ordre -matrius els arguments de les quals són com a màxim de segon ordre- com ara

$$F(f!(\hat{\phi}!\hat{z})),\ G(f!(\hat{\phi}!\hat{z},x)),\ ...$$

(on $f!(\hat{\phi}!\hat{z})$ representa una funció qualsevol de segon ordre amb un argument que és una funció de primer ordre i $f!(\hat{\phi}!\hat{z},x)$ una funció qualsevol de segon ordre amb dos arguments, un que és una funció de primer ordre i l'altre un individual), o bé funcions derivades d'aquestes matrius per generalització com ara

$$(f)F(f!(\hat{\phi}!\hat{z})),\ (\phi)G(f!(\hat{\phi}!\hat{z},x)),\ ...$$

Així doncs, les funcions de tercer ordre podran tenir com arguments individuals, funcions de primer ordre i de segon ordre, la qual cosa equival a dir que pressuposen la totalitat de les funcions de segon ordre. Evidentment, aquest procés pot ser continuat indefinidament, obtenint-se així una jerarquia de funcions proposicionals l'ordre de les quals, segons Russell, podrà ser arbitràriament gran, però no infinit.[1] Evidentment, tal com hem dit abans, de la mateixa manera que hom obté les funcions d'un determinat ordre que contenen variables aparents a partir de les matrius del mateix ordre convertint *algun* dels arguments d'aquestes en variables aparents, hom obtindrà també les proposicions de qualsevol ordre a partir de les

[1] Segons Russell, "donat que els ordres de les funcions estan definits pas a pas [*step by step*], no pot haver un procés de "tendir al límit" ["*proceeding to the limit*"] i les funcions d'ordre infinit no poden presentar-se" (*Ibid.*, 53). Però aquesta argumentació sembla poc convincent. En qualsevol cas, les raons que impulsaren Russell a considerar els tipus o ordres com a finits són evidents. Es tractava, en efecte, d'evitar les crítiques formulades per Poincaré, segons les quals la lògica a la qual els logicistes pretenien reduir les matemàtiques requeria ella mateixa idees matemàtiques com, per exemple, la idea d'infinit o la inducció matemàtica.

matrius pertanyents al mateix ordre en la jerarquia de funcions, convertint *tots* els seus arguments en variables aparents. Així doncs, assenyala Russell, "la jerarquia proposicional pot derivar-se de la jerarquia funcional, i podríem definir una proposició de l'ordre n-èsim com aquella que conté una variable aparent de l'ordre $n - 1$-èsim en la jerarquia funcional".[1] Així, les *proposicions de primer ordre* seran aquelles que no contenen altres variables aparentes llevat de les individuals, les *proposicions de segon ordre* aquelles que no contenen altres variables aparents llevat de les variables aparents de primer ordre i, possiblement, variables aparents individuals, i així successivament.

Per acabar la nostra exposició sobre la teoria de tipus russelliana i abans de discutir els problemes relacionats amb la reconstrucció lògica de les matemàtiques a partir d'ella, convé fer algun comentari sobre l'ontologia implícita en la teoria de tipus de "Mathematical Logic" i *Principia*. Com ja hem vist, la teoria de tipus consisteix essencialment en una jerarquia de funcions proposicionals i proposicions de manera que, donat que les proposicions es poden considerar un cas particular de funcions proposicionals -a saber, funcions 0-àries-, podríem considerar que les úniques entitats legítimes són les funcions proposicionals i els individuals. Aquesta concepció realista de les funcions proposicionals és fonamental per entendre la diferència entre la teoria substitucional i la teoria de tipus car, tal com hem vist en la secció anterior, la teoria substitucional es caracteritza precisament per la substitució de les funcions per matrius. Les raons que haurien empès Russell a acceptar les funcions com entitats de ple dret, és a dir, com entitats independents o subjectes lògics són de diversa índole. En primer lloc, l'abandó de la teoria substitucional ramificada hauria significat als ulls de Russell la renuncia a bastir una teoria que prescindís de les funcions. En segon lloc, el desenvolupament formal de la teoria de classes i relacions a "Mathematical Logic" i *Principia* com una teoria en la qual aquestes entitats estan definides contextualment com extensions de funcions proposicionals -en definitiva, com a *façons de parler*- hauria augmentat la pressió per acceptar les funcions proposicionals com a entitats de ple dret, sobretot si es té en compte que la reconstrucció lògica de les matemàtiques depèn de la teoria de classes i relacions -recordem que la constatació que la quantificació sobre classes i relacions suposava implícitament la quantificació sobre funcions, ja havia obligat Russell a admetre les variables funcionals a *Principles* (*Cf. supra*, § 7). Remarquem, per exemple, i sense anar més lluny, que en la definició contextual de classe de "Mathematical Logic" i *Principia*, les funcions proposicionals figuren com a subjectes lògics en el *definiendum* i, per

---

1 *Ibid.*, 55.

tant, la teoria de classes descansa sobre la possibilitat de quantificar sobre funcions (*Cf. infra*, § 13). Finalment, la caracterització de les funcions proposicionals com entitats ambigües, és a dir, com entitats que pressuposen el seu rang de significació, hauria permès Russell acceptar l'existència de diferents tipus de variables funcionals sense que això impliqués, als seus ulls, renunciar del tot a la teoria de la variable universal. En efecte, tal com ha assenyalat Goldfarb en l'article "Russell's Reasons for Ramification" (*1989*):

> Una vegada s'han acceptat les funcions proposicionals, amb la idea concomitant que tota fórmula oberta ben formada del llenguatge n'expressa una, paradoxes com la paradoxa de Russell sorgeixen immediatament a no ser que es posin algunes restriccions sobre les variables. Afortunadament, l'admissió de les funcions proposicionals permet a Russell pensar que les restriccions en els rangs de les variables són compatibles amb la universalitat de la lògica. Car, argumenta [Russell], aquestes restriccions provenen del rang de significació de les funcions proposicionals. Això és, hi ha, de forma inherent a una funció proposicional, un rang d'arguments, al qual la funció proposicional pot ser aplicada amb sentit. En aquest sentit, les restriccions en les variables són intrínseques més que no pas estipulades *ad hoc*.[1]

Destaquem finalment que aquesta ontologia implícita a *Principia*, constituïda pels individuals i les funcions proposicionals, és confirmada per diversos articles de Russell publicats entre 1910 i 1913. Així, per exemple, en l'article "Knowledge by Acquaintance and Knowledge by Description" (*1911*), Russell descriu la seva ontologia com consistent exclusivament en *particulars* i *universals*, i en l'article "On the Relations of Universals and Particulars" (*1912_a*) assenyala que els particulars són "les entitats que només poden ser subjectes o termes de relacions i no poden ser predicats o relacions".[2] Un universal, en canvi, és "qualsevol cosa que és un predicat o una relació", però també pot ser un subjecte o terme de la relació.[3] Evidentment, aquesta distinció correspon en bona mesura a la distinció de *Principia* entre individuals i funcions proposicionals. Amb tot, els particulars de l'article de 1911 inclouen no només els individuals, sinó també determinats complexos que anomena

1 *Savage i Anderson 1989*, 36-37.

2 *Russell 1992*, 170

3 *Cf. ibid*, 170. Naturalment, aquesta distinció coincideix plenament amb la distinció de *Principles* entre *coses* i *conceptes*, però amb la diferència essencial que la paradoxa dels conceptes que s'apliquen a si mateixos durà Russell a negar en aquesta obra la possibilitat que els conceptes puguin esdevenir subjectes lògics, mentre que a l'article de 1912 tant els particulars com els universals s'accepten com entitats de ple dret.

esdeveniments o *fets* com, per exemple, "això-abans-d'allò" o "la-grogor-d'això". Això és important, perquè, tal com ha assenyalat Cochiarella en l'article "Russell's Theory of Logical Types and the Athomistic Hierarchy of Sentences" (*1989*) i comprovarem després, són precisament aquests esdeveniments o fets els que "forneixen la base de la nova teoria de la veritat; això és, la teoria en la qual la veritat i falsedat ja no són més les propietats de les proposicions enteses com entitats simples, reals i independents, sinó que són més aviat "propietats de les creences i enunciats""[1] En qualsevol cas, tal com explicarem tot seguit, aquesta teoria és totalment irrellevant per al desenvolupament de la lògica de *Principia* i per a la solució de les paradoxes.

Aquesta nova teoria de la veritat és part de la nova teoria del judici russelliana, esbossada per primera vegada a la tercera part de l'article "On the Nature of Truth" (*1907*), la qual fou reescrita i publicada al darrer capítol de la recopilació d'articles *Philosophical Essays* de 1910 amb el títol "On the Nature of Truth and Falsehood" (*1910$_a$*). Essencialment, aquesta teoria és la següent: La veritat i la falsedat es prediquen dels enunciats [*statements*] i dels judicis o creences i la veritat i la falsedat dels primers pot ser definida en termes de la dels segons. Un judici o creença no és més que una relació entre la ment i determinats objectes. Però, assenyala Russell, "aquí s'ha de fer una distinció entre dues teories diferents respecte a la relació que constitueix el judici. Si jo jutjo (per exemple) que Carles I va morir en el cadafal, ¿és aquesta una relació entre jo i un "fet" simple, a saber, la mort de Carles I en el cadafal o "que Carles I va morir en el cadafal", o és una relació entre jo i Carles I i morir i el cadafal?"[2] La primera teoria exposada per Russell és el que podríem anomenar "teoria proposicional del judici" i, com ja sabem, l'existència dels judicis o enunciats falsos duu a l'aporia d'haver d'admetre que a aquests judicis els corresponguin fets o proposicions falses o bé que no els correspongui cap fet (*Cf. supra*, § 8). La solució a l'aporia és llavors abandonar la primera teoria, que ens ha portat a ella, i acceptar la segona teoria. En efecte, segons Russell:

> La solució a la dificultat consisteix a mantenir que, tant si jutgem correctament com si jutgem erròniament, no hi ha una cosa que nosaltres jutgem. Quan jutgem que Carles I va morir en el cadafal, no tenim davant nostre un objecte, sinó diferents objectes, a saber, Carles I, morir i el cadafal [...] Aquests objectes no són ficcions i són tan reals com els objectes d'un enunciat vertader. Així escapem

1 *Savage i Anderson 1989*, 49.
2 *Russell 1992*, 118.

> llavors a la necessitat d'admetre falsedats objectives, o d'admetre que, en jutjar erròniament, no tenim res davant la nostra ment. Així, des d'aquesta perspectiva, el judici és una relació de la ment a altres i diversos termes: quan aquests altres termes tenen *inter se* una relació "corresponent" [a l'establerta per la nostra ment en el judici], el judici és vertader i quan no, és fals.[1]

Russell anomena *relació múltiple* a la relació que s'estableix entre la ment i els objectes que són presents a la ment en el judici o creença i, per això, a la teoria anterior se l'anomena sovint "multiple relation theory of judgement". La diferència fonamental entre aquesta teoria i la teoria proposicional del judici -que correspon en bona mesura a la teoria esbossada en els manuscrits del període 1903-05- rau en què: (*i*) les proposicions ja no s'identifiquen amb els fets, deixant de ser l'objecte del judici o creença i (*ii*) la veritat i la falsedat ja no es consideren propietats de les proposicions, sinó dels enunciats i dels judicis o creences. La conseqüència immediata d'això és que les proposicions deixen de ser entitats legítimes i esdevenen "falses abstraccions". Així, escriu Russell a *Principia*:

> El que anomenem "proposició" (en el sentit que aquesta es distingeix de la frase que l'expressa) no és en absolut una entitat simple. És a dir, la frase que expressa una proposició és el que anomenem un "símbol incomplet"; no té significat en si mateix, sinó que requereix alguna suplementació per adquirir un significat complet.[2]

Ara bé, les proposicions no són símbols incomplets en el mateix sentit que ho són les classes o relacions, és a dir, en el sentit que siguin introduïdes contextualment a partir de les funcions proposicionals, sinó simplement en el sentit que el seu significat requereix ser suplert pel mateix acte de jutjar.[3] Un cop refusades les proposicions com objectes del judici, jugaran un paper essencial en la definició de la veritat els complexos abans esmentat. Així, per exemple, assenyala Russell, "quan jutgem "*a* té la relació *R* a *b*", el nostre judici és dit *vertade*r si hi ha un complex "*a*-en-la-relació-*R*-a-*b*", i serà dit *fals* si aquest no és el cas".[4] I, en lloc de dependre l'ordre de la veritat o falsedat de l'ordre de les proposicions, dependrà de

---

1 *Ibid.*, 120.

2 *Russell 1910*, 44.

3 És interessant notar que aquesta doctrina recorda en bona mesura la distinció de *Principles* entre "proposició considerada" i "proposició afirmada", encara que, a diferència del que s'esdevenia en aquella obra, ara es nega tota legitimitat ontològica a les proposicions.

4 *Ibid.*, 43.

l'ordre dels enunciats o judicis als qual aquella ara s'aplica, depenent aquests de l'ordre màxim de les funcions proposicionals que intervenen en ells. Veiem així que aquesta concepció de la naturalesa de les proposicions és molt similar a la concepció de les mateixes a *TSR* i, de fet, és tan irrellevant per al desenvolupament de *TTR* i la solució de les paradoxes proposicionals com ho és aquella per al desenvolupament de *TSR* i per la solució de les paradoxes del mateix tipus. Notem, en efecte, que la jerarquia de proposicions s'empra només per a la solució de les paradoxes proposicionals -i, en particular, la del mentider-, de forma completament anàloga a com s'emprava la jerarquia de proposicions o enunciats generals de *TSR*, encara que ambdues jerarquies són completament diferents -recordem, en efecte, que a *TSR* el tipus d'un enunciat general estava determinat exclusivament pel nombre de variables aparents que figuren en ell, mentre que a *TTR* el tipus d'un enunciat general estarà determinat per l'ordre de les seves variables aparents.[1] Ara bé, en un i altra cas, la solució de la paradoxa no depèn en absolut del fet que les proposicions siguin símbols incomplets, sinó de la ramificació de les proposicions imposada pel *PCV* i, en el cas de la teoria de tipus, aquesta ramificació és conseqüència de la ramificació de les funcions proposicionals. A més, la noció de proposició no juga cap paper en la reducció de les matemàtiques a la lògica car, com ja hem explicat, la noció fonamental en aquest sentit no és la de *proposició* sinó la de *funció proposicional*. De fet, la raó per la qual es distingeix entre la jerarquia funcions proposicionals i la de proposicions és que, segons Russell, donat que les classes i relacions es defineixen contextualment a partir de les funcions proposicionals, "les paradoxes es redueixen a aquelles que fan referència a les proposicions i funcions proposicionals",[2] encara que només aquestes últimes són rellevants per les matemàtiques per les raons ja esmentades. Ara bé, des del moment que la teoria de tipus introdueix les proposicions com un cas particular de funcions proposicionals -funcions 0-àries- sembla clar que la persistència a parlar de proposicions es deu fonamentalment a l'herència rebuda i a la importància cabdal que, segons Russell, té aquesta noció en lògica.

---

1 Encara que no hi hem fet referència, Russell comenta alguna vegada que el tipus d'una funció proposicional vindria també determinat no només per l'ordre, sinó també pel nombre dels seus arguments, per la qual cosa el tipus d'una proposició dependria no només de l'ordre, sinó també del nombre de les seves variables aparents. De fet, la caracterització que fa Church de la noció de tipus lògic en l'article "Comparison of Russell's Resolution of the Semantical Antinomies with that of Tarski" (*1976*$_b$) es fa ressò d'això.

2 *Ibid.*, 38.

12. La noció de predicativitat i l'axioma de reductibilitat

D'acord amb la teoria de tipus ramificada, no és possible parlar de totes les funcions d'un determinat argument, sinó que cal especificar l'ordre de les funcions en qüestió. Així, per exemple, no es pot parlar significativament de "totes les funcions de *a*", on *a* és un individual, sinó que només es pot parlar de "totes les funcions de primer ordre de *a*", "totes les funcions de segon ordre de *a*", etc. Ara bé, en lògica i en matemàtiques s'utilitzen constantment generalitzacions sobre totes les funcions o propietats d'un argument determinat o, equivalentment, sobre totes les classes a les quals pertany un determinat objecte, per la qual cosa la reconstrucció de les matemàtiques en el marc de la teoria de tipus sembla *prima facie* impossible. Els exemples següents ens ajudaran a veure això una mica millor:

La definició de la identitat. D'ençà Leibniz, la identitat entre dos objectes individuals s'ha definit a través del *principi dels indiscernibles*, el qual expressa la idea intuïtiva que dos individus són idèntics si tenen exactament les mateixes propietats. Formalment:

$$x = y \equiv \forall\phi(\phi x \rightarrow \phi y).$$

Ara bé, aquesta definició és, d'acord amb la teoria de tipus ramificada, un enunciat sense significat perquè conté una generalització sobre totes les funcions d'individuals. Per tant, sembla que la teoria de la identitat no pot ser desenvolupada en el marc estricte de la teoria de tipus de *Principia*.

La definició de nombre natural. D'ençà Frege i Dedekind, s'han definit els nombres naturals com aquells que tenen totes les propietats hereditàries del 0, la qual cosa podríem expressar formalment així:

$$Nx \equiv \forall\phi\{\phi 0 \wedge \forall x \forall y[\phi x \wedge S(x,y) \rightarrow \phi y] \rightarrow \phi x\}$$

Aquesta definició és, pels mateixos motius que l'anterior, un enunciat sense significat en el marc de la teoria de tipus ramificada. Però els efectes que se segueixen d'aquest fet són encara més devastadors, car la manca de significat de l'enunciat anterior suposa no només la manca de validesa de la noció intuïtiva de nombre finit o natural, sinó també del principi d'inducció. D'acord amb la definició anterior tenim, en efecte, que si *N* és la propietat de tenir totes les propietats hereditàries del 0 i si *P* és una propietat d'aquesta mena, llavors tot el que tingui la propietat *N* tindrà la propietat *P*. Però si definim *N*, d'acord amb la teoria de tipus ramificada, com la propietat de tenir totes les propietats hereditàries del 0 d'un cert ordre *n* i *P* és una propietat hereditària d'un ordre més gran que *n*, llavors no podem deduir de la definició de *N* que tots els nombres tinguin la propietat *P*.

La completesa dels reals. Una de les propietats més importants dels nombres reals és que tot conjunt de nombres d'aquest tipus és complet o, el que és el mateix, que tot conjunt de reals fitat superiorment té suprem. Formalment,

$$\forall X\{\exists x\forall y[X(y) \to y \leq x] \to \exists x[\forall y(X(y) \to y \leq x) \wedge \forall x'(\forall y(X(y) \to y \leq x') \to x \leq x')]\}.$$

Aquesta propietat s'anomena a vegades completesa de Dedekind, perquè va ser aquest matemàtic el primer que la va demostrar. A partir d'ella, el mateix Dedekind va demostrar alguns dels teoremes fonamentals de l'anàlisi real com, per exemple, que tota successió creixent i fitada té un límit o que una funció *f* definida en els reals té límit quan $x \to \infty$ si, per tot $\delta \in \mathrm{Z}$, existeix un x_0 tal que $|fx - fx_0| < \delta$ per a tot $x > x_0$. El problema és que les demostracions dedekindianes d'aquests teoremes no es poden reproduir en la teoria de tipus de *Principia*. Suposem, en efecte, que definim els nombres reals, d'acord amb la modificació russelliana de la definició de Dedekind, com *segments* dels racionals, això és, conjunts dels racionals que no contenen tots els racionals però contenen tot racional menor que qualsevol dels seus elements. A partir de l'ordre dels racionals podem definir llavors l'ordre dels reals: un real és més gran que un altre si, i només si, conté algun racional més gran que qualsevol dels racionals contingut en l'altre. Considerem ara un conjunt qualsevol de nombres reals, llavors és fàcil de demostrar que la unió dels segments de racionals que constitueixen aquest conjunt (*i*) és també un segment dels racionals i (*ii*) és la fita superior mínima d'aquest conjunt, és a dir, el seu suprem. Intentem ara reproduir aquest argument en el marc de la teoria de tipus ramificada. Donat que els segments dels racionals es defineixen unívocament a través de propietats d'un ordre determinat, cada conjunt de reals estarà definit per una propietat d'aquestes propietats i la unió d'aquest conjunt es definirà quantificant sobre totes les propietats que tenen aquesta propietat. Però llavors, la unió del conjunt en qüestió estarà definida per una propietat d'ordre superior a l'ordre de les propietats a través de les qual hem definit els reals i, per tant, no podrà ser ella mateixa un nombre real.

Doncs bé, per solucionar aquests problemes Russell introdueix tant a "Mathematical Logic" com a *Principia* la noció de *predicativitat* i l'*axioma de reductibilitat*. Així, assenyala Russell a *Principia*:

> Definirem una funció d'una variable com a predicativa si és de l'ordre immediatament superior al del seu argument, *i.e.* si és de l'ordre més petit compatible amb tenir aquell argument. Si una funció té distints arguments, i l'ordre més gran de les funcions que figuren entre els arguments és el n-èsim, anomenarem la funció predicativa si és de l'ordre $n+1$, *i.e.* de nou, si és de l'ordre més petit compatible amb tenir els arguments que té.[1]

El fet que una funció sigui predicativa s'indica amb un signe d'admiració entre la funció i els seus arguments i potser val la pena destacar amb Russell que "totes les funcions de l'anterior jerarquia poden obtenir-se a partir de funcions predicatives i variables aparents [...] parlant generalment, una funció no predicativa de l'ordre n-èsim s'obté a partir d'una funció predicativa de l'ordre n-èsim convertint tots els arguments de l'ordre $n-1$-èsim en variables aparents".[2] Considerem, per exemple, les funcions de segon ordre: totes les matrius d'aquesta mena són predicatives, car al menys un dels seus arguments ha de ser una funció predicativa de primer ordre; en canvi, entre les funcions obtingudes a partir de les matrius de segon ordre, és perfectament possible trobar-se una funció no-predicativa i, de fet, una de les funcions que ens servia com exemple de les funcions d'aquesta mena, a saber,

$$(\phi) \cdot F(\phi!\hat{z}, x)$$

no és predicativa, car és una funció de segon ordre i, en canvi, el seu argument és x, *i.e.* un individual. Ara bé, donat que la matriu F és predicativa, la funció anterior és equivalent a

$$(\phi) \cdot F!(\phi!\hat{z}, x),$$

i es pot considerar, doncs, com una funció obtinguda en generalitzar sobre l'argument d'ordre màxim entre els arguments de la funció predicativa F. Aquest exemple revela dues dades

---

1 *Ibid.*, 53.

2 *Ibid.*, 53-54. El signe d'admiració ja s'havia emprat abans per denotar les funcions d'un ordre qualsevol de la jerarquia ramificada de tipus, la qual cosa afegeix una certa confusió a l'exposició de Russell.

importants: (*i*) totes les matrius són predicatives i (*ii*) totes les funcions d'un determinat ordre, predicatives o no, poden obtenir-se a partir de matrius del mateix ordre i, per tant, a partir de funcions predicatives del mateix ordre. Això explica, des del nostre punt de vista, perquè Russell reservarà en el capítol XII de *Principia* el nom de funcions predicatives a les matrius i construirà a partir d'elles una nova jerarquia de funcions i proposicions, diferent de la jerarquia de "Mathematical Logic" i de la Introducció de *Principia*. Aquesta nova jerarquia de funcions -i, per extensió, de proposicions- és menys complicada que l'anterior donat que, a diferència d'ella, les matrius de qualsevol ordre només poden tenir individuals o matrius com arguments. D'aquesta manera la jerarquia de matrius esdevé el moll de l'os de la jerarquia de funcions i proposicions, car l'ordre de les funcions i proposicions que contenen variables aparents dependrà exclusivament del rang de significació de les matrius a partir de les quals s'han obtingut. Així, per exemple, les funcions de primer ordre seran les matrius que només contenen individuals com arguments i les funcions derivades a partir d'aquestes per generalització sobre *alguns* dels seus arguments. Les funcions de segon ordre seran les matrius de segon ordre, és a dir, les matrius que contenen com arguments matrius de primer ordre i, possiblement, individuals, i les funcions derivades a partir d'aquestes per generalització sobre *alguns* dels seus arguments. I així successivament. Evidentment, generalitzant sobre *tots* els arguments de les matrius d'ordre *n* obtindrem les proposicions d'ordre *n* i, doncs, podem construir una jerarquia de proposicions de forma completament anàloga a la jerarquia de funcions.

Abans havíem dit que no és possible, d'acord amb la teoria de tipus ramificada, generalitzar sobre totes les funcions d'un argument d'un tipus determinat. Sí es possible, en canvi, generalitzar sobre totes les funcions predicatives d'aquest mateix argument, perquè aquestes funcions són totes del mateix ordre. Per tant, si per tota funció proposicional existís una funció predicativa equivalent -coextensiva- amb ella, podríem solucionar els problemes esmentats relatius a generalitzacions il·lícites en el marc de la teoria del tipus lògics, però totalment indispensables per a la reducció de les matemàtiques a la lògica. Doncs bé, això és el que enuncia precisament l'*axioma* -o, millor dit, els axiomes- *de reductibilitat*. Per exemple, en el cas de les funcions d'un argument, l'axioma de reductibilitat és:

$$*12 \cdot 1. \vdash : (\exists f) : \phi x \cdot \equiv_x \cdot f!x,$$

on ϕ representa una funció qualsevol d'ordre més alt que el requerit pels seus arguments i f una funció de l'ordre més baix compatible amb ells.[1] Ara bé, tal com hem dit abans, la noció de predicativitat i l'axioma o axiomes de reductibilitat permeten solucionar els problemes esmentats abans i altres problemes similars que es puguin plantejar en el decurs de la reconstrucció de les matemàtiques en el marc de la teoria de tipus. Així, per exemple, hom pot substituir la definició anterior d'identitat per la següent definició (ara en la notació de *Principia*):

$$*13 \cdot 01.\ x = y \cdot \equiv : (\phi) : \phi ! x \cdot \supset \cdot \phi ! y,$$

que no viola les restriccions de la teoria de tipus de *Principia* i és, d'acord amb l'axioma de reductibilitat, equivalent a la primera.[2] Anàlogament, hom pot definir els nombres naturals generalitzant sobre totes les propietats hereditàries 0 i predicatives. De bell nou, aquesta definició no violarà la teoria dels tipus lògics i serà equivalent a l'original i, a més, permetrà fonamentar la inducció matemàtica: notem, en efecte, que donada una propietat P hereditària del 0 i de qualsevol ordre, existeix, per l'axioma de reductibilitat, una propietat Q hereditària del 0 i predicativa, que és equivalent a ella i que posseeixen, per la definició anterior, tots els nombres naturals. Per tant, tots els nombres naturals posseeixen també P. Finalment, el problema de la demostració de la completesa dels reals se soluciona de forma molt similar. Recordem, en efecte, que els segments dels racionals es defineixen a través de fórmules obertes que contenen només variables lliures i lligades, el rang de les quals són racionals i, per tant, es tracta de propietats predicatives dels nombres racionals. En canvi, la unió d'un conjunt de segments de racionals es defineix a través d'una fórmula que conté, a més de les variables abans esmentades, variables funcionals aparents i, per això, és una funció impredicativa dels racionals. Però, d'acord amb l'axioma de reductibilitat, existirà una propietat predicativa dels racionals equivalent a ella i que serà, doncs, del mateix ordre que la resta de propietats a partir de les quals hem definit els segments de racionals. Així doncs, podem definir la unió d'un conjunt de reals amb una fórmula del mateix ordre que aquelles amb les quals definíem la resta dels reals que pertanyen a aquest conjunt i demostrar, en el marc de la teoria dels tipus lògics, que tot conjunt de reals té suprem.

---

[1] *Cf. ibid.*, 56. En la conclusió veurem una formulació moderna de l'axioma de reductibilitat, que dona raó de la quantificació funcional implícita en l'axioma anterior i del fet que hi ha d'haver un axioma de reductibilitat per cada tipus d'argument de la funció ϕ.

[2] *Cf. ibid.*, 57.

13. La jerarquia extensional i l'axioma de l'infinit

Els símbols de classe s'introdueixen a *Principia* com a símbols incomplets. Segons Russell, en efecte:

> Els símbols de classe, com els de les descripcions, són, en el nostre sistema, símbols incomplets: es defineixen els seus usos, però no s'assumeix que signifiquin res en absolut [...] Així, en la mesura que els introduïm, són convencions merament simbòliques o lingüístiques, no objectes genuïns com són els seus membres si són individuals.[1]

Ara bé, ¿què representen els símbols de classe a través dels diferents contextos en què són *usats*? Evidentment, l'extensió comuna de totes les funcions proposicionals coextensives amb un argument. Car, segons Russell, "és natural considerar l'extensió com un objecte, anomenat una *classe*, que se suposa que és el subjecte de tots els enunciats equivalents sobre diverses funcions formalment equivalents".[2] D'altra banda, ¿quines són les propietats que hom atribueix generalment a les classes i que, per tant, les definicions contextuals dels símbols de classe hauran d'expressar? És tracta, segons Russell, de les següents propietats:

> (1) Tota funció proposicional ha de determinar una classe, que podria considerar-se llavors com la col·lecció de tots els arguments que satisfan la funció en qüestió [...] (2) Dues funcions que són formalment equivalents, *i.e.* tals que qualsevol argument que satisfaci a una d'elles satisfà també a l'altra, han de determinar la mateixa classe [...] (3) Recíprocament, dues funcions proposicionals que determinen la mateixa classe han de ser formalment equivalents [...] (4) En el mateix sentit en què hi ha classes (sigui quin sigui aquest sentit), o en un sentit estretament anàleg, ha d'haver-hi també classes de classes [...] (5) En totes les circumstàncies, ha d'estar mancat de sentit suposar que una classe és idèntica a un dels seus propis membres.[3]

D'acord amb el primer requisit, una funció proposicional $\phi\hat{z}$ determinarà la classe $\hat{z}(\phi z)$ que Russell defineix contextualment a *Principia* de la següent manera:

---

[1] *Ibid.*, 71-72.
[2] *Ibid.*, 74.
[3] *Ibid.*, 76-77.

$$f\{\hat{z}(\phi z)\} \cdot = : (\exists \psi) : \phi x \cdot \equiv_x \cdot \psi ! x : f\{\psi ! \hat{z}\}.$$

Aquesta definició permet, en efecte, expressar totes les propietats d'una classe qualsevol en termes d'una funció proposicional predicativa coextensiva amb ella. En altres paraules, permet analitzar totes els enunciats referents a classes en termes d'enunciats referents a funcions proposicionals predicatives i satisfà, doncs, el primer requisit. Com hem notat en la secció anterior, aquesta definició mostra la importància de l'axioma de reductibilitat en la teoria de classes, car la mateixa definició de classe només és vàlida si per una funció qualsevol $\phi\hat{x}$ existeix una funció predicativa $\psi!\hat{x}$ coextensiva amb ella i, per tant, pressuposa l'axioma de reductibilitat.

D'acord amb el segon i tercer requisit, dues classes seran idèntiques si, i només si, les funcions que determinen aquestes classes són formalment equivalents o coextensives, això és:

$$\hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) \cdot \equiv : \phi x \cdot \equiv_x \cdot \psi x,$$

la qual cosa s'obté fàcilment a través de la definició següent:

$$\chi ! \hat{z} = \theta ! \hat{z} \cdot = : (f) : f ! \chi ! \hat{z} \cdot \supset \cdot f ! \theta ! \hat{z}$$

i la definició contextual dels símbols de classe.

El quart requisit no és pas banal car, com assenyala el mateix Russell, "sense classes de classes, l'aritmètica esdevé impossible"[1] -recordem, en efecte, que Frege i Russell defineixen els nombres cardinals com a classes de classes semblants- i, per tant, de la possibilitat de definir les classes de classes en termes pareguts a com s'havien definit les classes, depèn l'èxit del programa logicista. De fet, la definició d'una classe de classes se segueix naturalment de la definició contextual de classe. En efecte, assenyala Russell, donat que hem definit una classe $\hat{z}(\phi z)$ a través de $f\{\hat{z}(\phi z)\}$, "és natural considerar que una classe de classes consisteix en tots aquells valors de $\hat{z}(\phi z)$ que satisfan $f\{\hat{z}(\phi z)\}$".[2] Així, si α representa $\hat{z}(\phi z)$ i $\hat{\alpha}(f\alpha)$ representa la classe de valors de α que satisfan $f\alpha$, podem definir contextualment les classes de classes de forma anàloga a com havíem definit les classes posant:

1 *Ibid.*, 77.
2 *Ibid.*, 79.

$$F\{\hat{\alpha}(f\alpha)\} \cdot = : (\exists g) : f\beta \cdot \equiv_\beta \cdot g!\beta : F\{g!\hat{\alpha}\}$$

Aquesta analogia es manté també respecte a la relació de pertinença. Així, la definició anterior junt a la definició següent de la pertinença d'un individu a una classe:

$$x \in \psi!\hat{z} \cdot = \cdot \psi!x,$$

permet deduir, estenent l'axioma de reductibilitat a les funcions de funcions, que:

$$: \gamma \in \hat{\alpha}(f\alpha) \cdot \equiv \cdot f\gamma,$$

fórmula que defineix la pertinença d'una classe a una classe de classes. Notem finalment que $\hat{z}(\phi z) \in \hat{z}(\phi z)$ és equivalent, en virtut de la definició de pertinença, a:

$$(\exists \psi) : \phi x \cdot \equiv_x \cdot \psi!x : \psi!(\psi!\hat{z}),$$

però $\psi!(\psi!\hat{z})$ és, d'acord amb la jerarquia de tipus, una expressió sense sentit. D'aquí, conclou Russell, "“$\hat{z}(\phi z) \in \hat{z}(\phi z)$” no té sentit i el nostre cinquè requisit es satisfet".[1]

Tot el que hem dit fins ara s'aplicarà *mutatis mutandi* a les relacions, si es consideren funcions proposicionals de dues variables en lloc d'una com s'ha fet fins ara i s'introdueix un axioma de reductibilitat específic per aquestes com ara:

$$*12 \cdot 11. \vdash: (\exists f) : \phi(x,y) \cdot \equiv_{x,y} \cdot f!(x,y).$$

Així, hom pot desenvolupar la teoria de relacions en termes molt semblants als exposats fins ara respecte a les classes. Les classes i relacions s'estructuren en diferents jerarquies extensionals. En particular, *la* jerarquia extensional és la jerarquia formada, en el cas de les classes, pels individus, classes, classes de classes, etc, i, en el cas de les relacions, pels individus, relacions, classes de relacions, etc. Respecte a aquesta jerarquia cal tenir en compte algunes qüestions importants. En primer lloc, que es tracta d'una jerarquia de ficcions lògiques, amb l'excepció del tipus format pels individus, no d'entitats pròpiament dites. En segon lloc, que es dedueix de la jerarquia intensional, això és, de la jerarquia de funcions

1 *Ibid.*, 79.

proposicionals, la qual constitueix, en canvi, una jerarquia d'entitats. En tercer lloc, el desenvolupament de la teoria de classes requereix només funcions predicatives, l'existència de les quals és assegurada, per qualsevol funció proposicional que determina una classe, per l'axioma de reductibilitat. Això permet suposar que el desenvolupament de les matemàtiques que s'acompleix al llarg dels diferents volums de *Principia* requerirà només una jerarquia de funcions predicatives. En efecte, aquesta jerarquia estarà formada per individus, funcions proposicional que s'apliquen a un o més individus, funcions que s'apliquen a les funcions que s'apliquen als individus, etc, de la qual es dedueix immediatament la jerarquia de individus, classes, classes de classes, etc, i les diferents jerarquies de relacions -binàries, ternàries, etc. Veiem així que, tal com assenyala Russell, amb la definició contextual de les classes i l'axioma de reductibilitat, "hem eliminat en la pràctica la necessitat de considerar diferències de tipus entre les funcions els arguments de les quals són del mateix tipus. Això efectua el mateix tipus de simplificació en la nostra jerarquia que la que resultaria de no considerar altres funcions que les predicatives".[1]

En definitiva, la reducció de les matemàtiques a la lògica requereix només la jerarquia de funcions predicatives, en la qual es pot interpretar la *teoria simple de tipus* tal com aquesta es presentada en la majoria d'escrits sobre els fonaments de les matemàtiques.[2] De fet, com es ben sabut a partir dels anys vint, a partir d'aquesta teoria es poden reconstruir les matemàtiques clàssiques sense problema, per la qual cosa també es pot dur a terme aquesta reconstrucció a partir de la *teoria ramificada de tipus* plus l'*axioma de reductibilitat*. Ara bé, per això es requereixen encara un parell d'axiomes més: l'*axioma multiplicatiu* i l'*axioma de l'infinit* (*Cf. Apèndix*). Com és ben sabut, el primer axioma és equivalent a l'axioma d'elecció i ens ocuparem amb cert detall d'ell més endavant (*Cf. infra*, cap. VIII, § 10). Respecte al segon axioma, convé recordar primer de tot que, com ja hem explicat abans, la possibilitat de demostrar l'existència d'un nombre infinit d'entitats o objectes és imprescindible àdhuc per a les branques més elementals de les matemàtiques (*Cf. supra*, § 1). Un clar exemple d'això és la construcció a *Principia* dels nombres cardinals a partir de la jerarquia extensional de classes, la qual requereix un nombre infinit d'individus en el nivell més baix de la jerarquia. Doncs bé, per solucionar aquest tipus de problema, Russell proposà l'*axioma de l'infinit*, del qual se segueix immediatament l'existència d'un nombre infinit d'individus o, si ho preferim dir així, d'una classe infinita. Ara bé, és important assenyalar amb Russell, que aquest no és un axioma pròpiament dit de *Principia*, sinó que és un axioma que "s'addueix com a hipòtesi

[1] *Ibid.*, 75.
[2] *Cf. Hazen 1983*, 366-67.

sempre que és rellevant". Així, els teoremes que es demostren a *Principia* són sovint enunciats condicionals, en els quals l'antecedent és l'axioma de l'infinit i el conseqüent és el teorema en qüestió. Ara bé, és evident que encara que aquest axioma no afecti a l'anàlisi de les matemàtiques en termes de la lògica -a les definicions en termes de la lògica del conceptes matemàtics-, sí que afecta a la demostració d'alguns dels teoremes matemàtics més bàsics. Per tant, l'admissió d'aquest axioma suposa un reconeixement *de facto* que els teoremes de les matemàtiques no poden ser demostrats exclusivament en termes de principis lògics. I això, al mateix temps, hauria de dur a una reformulació de la tesi logicista, que afirmés no ja que les matemàtiques són reductibles a la lògica, sinó que les matemàtiques són reductibles a la lògica *si* a aquesta hi afegim l'axioma de l'infinit. Com veurem més endavant, Hilbert renunciarà explícitament al programa russellià de reconstrucció de les matemàtiques a partir de la teoria ramificada de tipus al·legant la manca de validesa lògica dels axiomes de reductibilitat i infinit, la qual cosa ens donarà l'oportunitat de discutir amb una mica més de detall el caràcter no lògic d'aquests dos axiomes (*Cf. infra*, cap. VIII, § 9).

14. Realisme *versus* constructivisme

Respecte a les diferents formulacions del *PCV* esmentades anteriorment (*Cf. supra*, § 11). Gödel ha assenyalat que "corresponent a les expressions "definible en termes de", "suposa" o "pressuposa" tenim en realitat tres principis diferents, el segon i el tercer dels quals són molt més plausibles que el primer" i que, tanmateix, és precisament "el primer d'ells el que té un interès especial, car només ell prohibeix les definicions impredicatives i destrueix, per això mateix, la derivació de les matemàtiques a partir de la lògica efectuada per Dedekind i Frege i bona part de les matemàtiques modernes ensems".[1] Així, per exemple, els axiomes de la matemàtica clàssica impliquen l'existència de nombres reals que només són definibles per referència a tots els nombres reals. Ara bé, tal com ha assenyalat Gödel irònicament, és preferible "considerar això com una prova que el principi del cercle viciós és fals, que com una prova que la matemàtica clàssica és falsa".[2] Aquesta darrer crítica al *PCV* ja ha estat contestada abans (*Cf. supra*, § 12). En poques paraules: l'axioma de reductibilitat és la resposta de Russell als problemes plantejats per la definició dels reals en el marc d'unes

[1] *Gödel 1990*, 127.
[2] *Ibid.*, 127

matemàtiques predicatives -*i.e.* d'unes matemàtiques desenvolupades en el marc de la teoria de tipus. La primera crítica, referent a la necessitat de distingir tres principis diferents de cercle viciós, serà contestada més endavant. En realitat, l'atac de Gödel al *PCV* és molt més profunda del que podria semblar a primera vista i segueix essencialment els mateixos passos que la crítica de Ramsey a l'article "The Foundations of Mathematics" (*1925*) i que més endavant seguirà Quine en l'obra *Set Theory and its Logic* (*1963)*. Exactament Gödel assenyala que:

> El principi del cercle viciós en la seva primera forma s'aplica només si nosaltres mateixos hem construït les entitats en qüestió. En aquest cas, està clar que ha d'existir una definició (a saber, la descripció de la construcció) que no es refereixi a una totalitat a la qual l'objecte definit pertanyi, car la construcció d'una cosa no pot, en efecte, basar-se en una totalitat de coses, a la qual la cosa que ha de ser construïda pertanyi. Si, tanmateix, es tracta d'un problema d'objectes que existeixen independentment de les nostres construccions, llavors no hi ha res d'absurd en l'existència de totalitats que continguin membres que puguin ser descrits (això és, caracteritzats unívocament) només per referència a aquesta totalitat.[1]

Així, per exemple, tal com havia assenyalat Ramsey en l'article abans esmentat, "podríem referir-nos a un home com el més alt d'un grup, identificant-lo així per mitjà d'una totalitat de la qual ell mateix n'és membre sense que hi hagi cap cercle viciós".[2] En resum, segons Ramsey i Gödel el principi de cercle viciós -en la seva primera versió- només resta vàlid si s'adopta, com Russell hauria fet segons aquests autors, un punt de vista *constructivista* respecte de les entitats lògico-matemàtiques -en aquest sentit, ha assenyalat Quine, fins i tot l'aplicació del *PCV* a les funcions proposicionals estaria totalment injustificada, donat que en la teoria de tipus aquestes són entitats legítimes i no construccions nostres. Ara bé, afirma Gödel, es possible també adoptar una concepció *realista* de la lògica i les matemàtiques, segons la qual les entitats d'aquestes ciències "existeixen independentment de les nostres definicions i construccions".[3] La força d'aquesta concepció realista o platònica dels objectes de les matemàtiques rau en què, en definitiva, aquests objectes "són necessaris per obtenir un sistema de matemàtiques satisfactori en el mateix sentit en què els cossos físics

---

1 *Ibid.*, 127-28.
2 *Ramsey 1978*, 192.
3 *Gödel 1990*, 128.

ho són per a una teoria satisfactòria de les nostres percepcions sensibles".[1] Per un "sistema satisfactori de les matemàtiques", Gödel entén essencialment la jerarquia cumulativa formulada per Zermelo com a base de la teoria de conjunts moderna, la qual fou adoptada per la majoria dels lògics interessats per la qüestió de la fonamentació de les matemàtiques a partir dels anys 30. I, com és ben sabut, aquest model de la teoria de conjunts està íntimament relacionat amb la teoria de tipus simple, la qual, tal com ja havia sustentat Ramsey, és suficient per a fonamentar les matemàtiques clàssiques. En definitiva, la crítica de Ramsey i Gödel al *PCV* i, consegüentment de la teoria *ramificada* de tipus que es deriva d'aquest principi, va de bracet amb la concepció realista de la lògica d'aquests autors, la plausibilitat de la qual raurà fonamentalment en la seva aplicabilitat a les qüestions de fonamentació -via la teoria simple de tipus de Ramsey o la teoria axiomàtica de conjunts de Zermelo.

Per respondre aquestes crítiques començarem discutint l'atribució implícita a Russell d'un punt de vista constructivista, segons el qual les entitats matemàtiques (classes, funcions proposicionals, ...) no existeixen independentment de nosaltres, sinó que són *construccions lògiques* l'existència de les quals depèn del fet que puguin ser especificades (definides, caracteritzades unívocament, ...) per nosaltres -aquest és el sentit que Gödel dóna al terme i és, en certa mesura, el seu sentit habitual. Ara, des del nostre punt de vista, Russell mai va adoptar una filosofia de la matemàtica de tipus constructivista, encara que la seva fonamentació lògica de les matemàtiques pugui ser interpretada en aquest sentit. Ans al contrari, la filosofia russelliana de les matemàtiques és de tall marcadament realista. Evidentment, no és pot parlar d'un únic punt de vista russellià al respecte, sinó que hi ha més aviat una evolució: des del realisme extrem de *Principles*, manifest per exemple en la seva concepció de la naturalesa de les proposicions, fins al punt de vist més parsimoniós de la teoria substitucional, en la qual Russell distingeix les entitats definides contextualment, que es consideren ficcions lògiques, d'aquelles l'existència de les quals es assumida independentment de qualsevol construcció: els individuals i les proposicions elementals -res més lluny, doncs, del constructivisme-, el cert és que Russell considerà sempre que les entitats lògico-matemàtiques -almenys aquelles que no eren posades en dubte per les contradiccions- són entitats "independents de qualsevol ment cognoscent" i, per tant, de qualsevol construcció nostra. Russell tampoc modificà aquesta concepció de les entitats lògico-matemàtiques en els escrits del període 1910-13, en els quals dóna raó de l'ontologia implícita a *Principia*. Així, per exemple, en l'article "The Philosophical Importance of

[1] *Ibid*., 128.

Mathematical Logic" (*1911$_a$*) una vegada reconegudes les funcions proposicionals com entitats independents i identificades amb els universals, Russell afirma que "la lògica i les matemàtiques ens forcen llavors a admetre un tipus de realisme en el sentit escolàstic, és a dir, a admetre que hi ha un món d'universals [...] Aquest món d'universals ha de *subsistir*, encara que no pugui *existir* en el mateix sentit què les dades particulars existeixen".[1] Ara bé, també és cert que és molt plausible atribuir un punt de vista constructivista a Russell, des del qual hom pot justificar llavors la teoria ramificada de tipus. Notem, en efecte, que la ramificació és conseqüència del requeriment de predicativitat imposat pel *PCV*, el qual han de satisfer aleshores totes les entitats que la teoria admet com existents. Es podria considerar llavors que aquestes entitats només existeixen en la mesura que la seva definició satisfà el requeriment de predicativitat abans esmentat. Ara bé, aquest punt de vista suposa una actitud constructivista només si hi ha una distinció entre la definició pròpiament dita -donada per nosaltres- i l'entitat definida, l'existència de la qual dependria llavors de la nostra capacitat d'especificar-la d'acord amb el *PCV*. Però aquesta distinció no existia als ulls de Russell en el cas de les entitats intensionals: funcions proposicionals i proposicions, que són les entitats ramificades d'acord amb el *PCV*. En altres paraules, per Russell no hi ha cap distinció entre l'especificació o caracterització d'una entitat intensional i aquesta mateixa entitat -el cas paradigmàtic d'una distinció d'aquesta mena seria el de les classes, però convé recordar que la jerarquia de classes -i relacions- requereix només una jerarquia simple de funcions proposicionals, per la qual cosa tampoc es pot atribuir una actitud constructivista a Russell en aquest cas. Una mostra clara d'això que estem dient l'ofereix el fet que el criteri d'identitat entre funcions proposicionals o proposicions no depèn dels objectes que satisfan aquestes funcions o del valor de veritat de les proposicions en qüestió, sinó de la seva pròpia forma lògica, això és, la forma en què aquestes funcions són especificades. Ara, des d'aquest punt de vista queda oberta immediatament la possibilitat de veure la ramificació d'aquestes entitats com una conseqüència de la seva estructura interna i no com una conseqüència d'una especificació externa a aquestes entitats de la qual dependria la seva existència i es pot rebutjar, doncs, l'atribució a Russell d'un punt de vista constructivista del qual dependria la ramificació de funcions i proposicions. Des d'aquest punt de vista es pot entendre també perquè Russell no va distingir les tres formulacions del *PCV* que, segons Gödel, constitueixen en realitat tres principis diferents. Si, en efecte, tenim en compte que el *PCV* s'aplica essencialment a les entitats intensionals i que no hi cap diferència entre

---

[1] *Russell 1992*, 39.

l'especificació (definició, caracterització) d'aquestes entitats i les mateixes entitats, llavors dir, per exemple, que "cap totalitat de funcions proposicionals o proposicions pot contenir membres que siguin *definible*s només *en termes* d'aquesta totalitat" és el mateix que dir "cap totalitat de funcions proposicionals o proposicions pot contenir membres que *pressuposin* o *suposin* aquesta totalitat".

A banda de tots els arguments anteriors, hi ha un altra argument que, des del nostre punt de vista, té un pes definitiu alhora de sustentar l'actitud realista de Russell. Es tracta, evidentment, del logicisme i la concepció de la lògica relacionada amb ell. D'acord amb aquesta filosofia de la matemàtica, en efecte, la lògica ha de ser universal i ha d'estar constituïda per les lleis més general sobre *l*'univers -lleis que tindran, doncs, un contingut, a saber, seran veritats sobre els objectes de *l*'univers. El logicisme requereix així una concepció realista de les entitats lògico-matemàtiques i és incompatible amb una concepció constructivista de les mateixes. Aquesta concepció de la lògica i les seves diferències amb la concepció moderna, *model-teorètica*, de la lògica s'explicaran abastament en la conclusió i, per tant, ara no incidirem més sobre aquest tema. Si voldríem remarcar, tanmateix, que el logicisme russellià és més radical que el fregeà, tal com ens ho mostra la seva diferent actitud davant de la noció de veritat. Frege introdueix els valors de veritat com objectes -junt amb els cursos de valors i la resta d'entitats denotades pels noms propis- i, per tant, tenen un *status* semàntic: els valors de veritat són, en definitiva, allò significat o denotat pels enunciats. Russell, en canvi, d'acord amb el vell *dictum* de *Principles* segons el qual la lògica i les matemàtiques *usen* la noció de veritat però no l'*esmenten*, exclourà de la lògica tota referència a la noció de veritat. Ara bé, la universalitat de la lògica impedeix al mateix temps que aquesta noció quedi exclosa completament del discurs lògic -car aquesta implica que hem de poder parlar de la veritat. Russell solucionarà aquesta aparent *aporia* introduint la veritat i falsedat com a propietat de les proposicions i considerant que aquestes són expressades i afirmades pels enunciats o sentències -veiem així la diferència amb Frege o Tarski, per als quals la veritat és una propietat d'aquests últims. Això té com a conseqüència que, en l'obra de Russell, no hi trobem la distinció característica en l'obra de Frege -i en la lògica moderna- entre el nivell *sintàctic* i el nivell *semàntic* i que el desenvolupament de la lògica de *Principia* es faci en termes exclusivament sintàctics -el rigor de *Principia*, almenys en aquest sentit, és molt superior al de *Begriffschrift*, car Frege apel·la contínuament a la semàntica per justificar els axiomes i deduir a partir d'ells els teoremes, quan ni les regles semàntiques ni la relació entre sintaxi i semàntica estan suficientment explicitades.

D'una altra banda, encara que el logicisme de Frege i Russell té notables concomitàncies, ambdós autors mantingueren una actitud ben diferent davant del descobriment de les paradoxes, la qual cosa podria ser senyal d'una notable diferència en la filosofia de la matemàtica d'ambdós autors -encara que això no pot ser confirmat, perquè Frege abandonà després de la publicació del segon volum de *Grundgesetze* l'intent de solucionar les paradoxes i fonamentar lògicament les matemàtiques, tot just quan Russell començava a aportar solucions imaginatives al respecte. Com és ben sabut, en efecte, Cantor havia definit un conjunt [*Menge*] com una col·lecció [*Vielheit*] que pot ser considerada com una unitat [*Einheit*] i havia desenvolupat la seva teoria de conjunts independentment de qualsevol sistema axiomàtic. Per contra, Frege i Russell, que estaven interessats sobretot en la reducció de les matemàtiques a la lògica, axiomatitzaren la lògica i definiren els conjunts com a extensions dels conceptes (Frege) o rang de valors de les funcions proposicionals (Russell), de manera que la teoria de conjunts -i amb ella les matemàtiques- poguessin reconstruir-se a partir de nocions exclusivament lògiques i mitjançant procediments estrictament lògics -car el conceptes o funcions proposicionals havien estat considerats sempre objectes d'estudi de la lògica. D'aquí que la paradoxa descoberta per Russell, tant si era formulada en termes de classes com si era formulada en termes de funcions proposicionals o conceptes anorreava la possibilitat de reduir les matemàtiques a la lògica. En aquest sentit, és ben significatiu que ambdós autors interpretessin la paradoxa de forma tan diferent. Frege, en efecte, entengué la paradoxa com referida exclusivament a la noció de classe, mentre que Russell la interpreta en ambdós sentit, encara que el punt de vista predominant fou sempre l'intensional. En el cas de Frege, el motiu d'això fou que la seva jerarquia de conceptes evitava la paradoxa relativa als conceptes, mentre que la paradoxa de classes sorgia immediatament a partir de la hipòtesi que a cada concepte el correspon un objecte -el seu curs de valors- de tipus sense especificar i del seu axioma V -que determinava les condicions d'identitat entre aquests objectes. D'aquí que Frege busqués la solució a la paradoxa en la reforma de l'axioma V de *Grundgesetze*. Ara bé, en el cas de Russell, la paradoxa formulada en termes de conceptes sorgeix des del moment en què s'accepta que els conceptes poden ser també termes o subjectes lògics, la qual cosa és a la base de la seva concepció universal de la lògica. Per això Russell reconeixeria a *Principles* que la solució de la paradoxa havia de passar per evitar que els conceptes o funcions proposicionals poguessin ser subjectes lògics. La teoria substitucional suposà un èxit en aquesta direcció però, pels motius ja explicats, fou abandonada i substituïda per la teoria ramificada de tipus. Aquesta teoria acceptava que les funcions proposicionals eren subjectes lògics però, i al mateix temps, dividia les funcions en diverses categories de manera que no es poguessin reproduir les paradoxes de tipus intensional -i tampoc evidentment les paradoxes de tipus extensional, en la mesura que classes i relacions havien estat introduïdes com a meres *façons de parler*. Amb tot, hom podria preguntar-se perquè era necessària la ramificació si la teoria simple de tipus era suficient per solucionar la paradoxa de Russell, tant si es considera relativa a la noció de classe com a la de funció proposicional. La resposta a això és que Russell formulà la seva teoria de tipus com a resposta no només a les paradoxes de la teoria de conjunts o matemàtic, sinó a tota mena de paradoxes, algunes de les quals oferien, si més no aparentment, un marcat caràcter no matemàtic (paradoxa del mentider, de Richard, etc) i que requerien aquesta ramificació -i no podien ser, doncs, resoltes per la teoria simple de tipus. En aquest sentit, doncs, la teoria de tipus no fa sinó respondre a la concepció russelliana de la lògica com un llenguatge universal i omnicomprensiu.

Hom podria preguntar-se finalment perquè, tal com hem dit abans, Russell va intentar solucionar les paradoxes i, en definitiva, fonamentar les matemàtiques a través de la reducció del concepte de conjunt o classe al de funció proposicional -car, després de tot, el concepte de classe havia pertangut també tradicionalment a la lògica, fins que Cantor va generalitzar la seva noció d'un conjunt de punts -*n*-tuples de nombres reals- a la d'un conjunt amb elements qualssevol, com ho fa palès l'ús que es fa d'aquesta noció en el corrent algèbric que va des de Boole a Schröder. La resposta a això és que els conjunts o classes són entitats extensionals, això és, entitats l'existència de les quals està determinada pels seus membres i que, per tant, tenen una existència completament independent de nosaltres i de la nostra capacitat de definir-los. Aquest és, en definitiva, el concepte de *conjunt* de Cantor, Dedekind i, més endavant, de Zermelo, Ramsey, Gödel i altres. Per contra, com ja hem explicat abans, les funcions proposicionals són entitats intensionals, en el sentit que la seva existència depèn de la nostra capacitat d'especificar-les o definir-les. Ara, des d'aquest punt de vista, encara que hom pugui donar una teoria consistent de conjunts a la manera, per exemple, de la teoria de Zermelo, hom podria preguntar-se ¿perquè hem d'acceptar l'existència de conjunts a banda de l'existència de funcions proposicionals? El que volem dir és que, una vegada adoptat un punt de vista *intensionalista* com el que Russell adoptà, i acceptat l'axioma segons el qual tot conjunt està determinat per una funció proposicional, el més natural és intentar solucionar les paradoxes i fonamentar les matemàtiques imposant determinant requisits a aquestes entitats intensionals. Això és el que fa Russell mitjançant la teoria de tipus, la qual imposa alhora com a criteri d'existència el requisit de predicativitat. Aquest punt de vista explica també el poc interès que mostrà Russell per la *teoria de la limitació de la mida* de les classes proposada per ell mateix i, en definitiva, per intentar extreure -com va fer Zermelo- una concepció coherent de la noció de conjunt a partir de la teoria cantoriana de conjunts.